Тогда, подставляя в условие (4.15) выражения (4.1), (4.10), (4.12) и учитывая (4.11), находим

$$a_{\lambda\lambda'} = W(\lambda, \lambda')\left[\exp(\hbar\omega/kT) - 1\right]. \tag{4.17}$$

Воспользуемся для $W(\lambda, \lambda')$ формулой (4.7), выражая в ней $\mathscr{E}_m^2$ через концентрацию фотонов $\rho(\hbar\omega)$ по формуле (3.8). Учитывая еще, что в равновесии $\rho_0(\hbar\omega)$ дается формулой Планка

$$\rho_0(\hbar\omega) = \frac{\omega^2 \varepsilon_1^{1/2}}{\pi^2 \hbar c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \tag{4.18}$$

(в которой мы заменили показатель преломления n на $\varepsilon_1^{1/2}$), получаем

$$a_{\lambda'\lambda} = \frac{16 e^2 \hbar\omega \varepsilon_1^{1/2}}{m_0^2 c^3} \left| (\xi, \mathbf{J}_{\lambda\lambda'}) \right|^2 \delta(E_{\lambda'} - E_\lambda - \hbar\omega)\, \Delta(\hbar\omega). \tag{4.19}$$

Не завися от вида функций распределения, эта формула остается в силе и в любых неравновесных условиях. Из формулы (4.19) видно, что $a_{\lambda'\lambda}$ не зависит от концентрации фотонов, имеющихся в образце, чего и следовало ожидать для спонтанных переходов.

Полученные результаты позволяют также найти отношение энергий, излучаемых при спонтанных и вынужденных переходах. Из формул (4.10) и (4.12) следует, что при данном переходе

$$\frac{Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{вын}}} = \frac{a_{\lambda'\lambda}}{W(\lambda, \lambda')}.$$

Пользуясь теперь формулами (4.17) и (4.18), находим

$$\frac{Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{вын}}} = \frac{\omega^2 \varepsilon_1^{1/2}}{\pi^2 c^3 \hbar} \frac{1}{\rho(\hbar\omega)}. \tag{4.20}$$

Таким образом, относительная роль обоих процессов зависит от концентрации фотонов данной частоты, т. е. от интенсивности активного излучения и от ширины его спектра. С помощью количественных оценок можно убедиться, что в обычных лабораторных источниках сплошного спектра (например, лампах накаливания) спонтанное излучение гораздо важнее вынужденного. Напротив, в оптических квантовых генераторах (лазерах, § 6), мощность которых огромна, а спектральный интервал очень узок, $\rho(\hbar\omega)$ очень велика и вынужденное излучение играет основную роль.

§ 5. Прямые и непрямые переходы

Рассмотрим поглощение света в идеальной решетке, связанное с переходами между валентной зоной и зоной проводимости. Для этой цели можно воспользоваться формулой (4.13), взяв в ней слагаемые с $l = c$ и $l' = v$. При этом матричный элемент, фигурирующий в (4.13), содержит функции Блоха (III.2.15′). Таким образом,

$$\mathbf{J}_{\lambda\lambda'} = \int \left(u_{\lambda'}^{*} \cdot \nabla u_{\lambda} + \frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p} u_{\lambda'}^{*} u_{\lambda}\right) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\hbar\mathbf{k},\,\mathbf{r})}\, d\mathbf{r}. \tag{5.1}$$

Для удобства записи мы ввели здесь волновой вектор фотона $\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}$.

Ограничимся наиболее интересным случаем сравнительно слабого поглощения, когда справедливо условие (1.19′). Тогда мнимой частью k в формуле (5.1) можно пренебречь. Соответственно подынтегральное выражение в (5.1) представляет собой произведение экспоненциальной функции с мнимым аргументом и функции периодической с периодом решетки. Согласно теореме, доказанной в Приложении XIV, интеграл $\mathbf{J}_{\lambda\lambda'}$ может быть отличен от нуля, лишь если выполняется правило отбора

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} + m\hbar\mathbf{b}, \tag{5.2}$$

где m — целое число или нуль*). Равенство (5.2) на первый взгляд кажется очевидным. Фактически, однако, выражаемый им закон сохранения не вполне тривиален: вектор $\hbar\mathbf{k}$ есть *импульс* фотона, в то время как $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ суть *квазиимпульсы* электрона в начальном и конечном состояниях.

При не слишком большой разности энергий $E_{\lambda'} - E_{\lambda}$ величина $\hbar\mathbf{k}$ заметно меньше характерного квазиимпульса электрона в начальном или конечном состояниях. В самом деле, согласно равенству (1.10) и закону сохранения энергии, выражаемому δ-функцией в формуле (4.13), мы имеем $k \sim \frac{n}{\hbar c}(E_{\lambda'} - E_{\lambda})$. Следовательно,

$$\frac{\hbar k}{p} \sim \frac{n\,(E_{\lambda'} - E_{\lambda})}{cp} \equiv \frac{\tilde{v}\,(\mathbf{p})}{c/n}; \tag{5.3}$$

характерная скорость $\tilde{v}\,(\mathbf{p})$ определяется этим соотношением. Оптические переходы могут совершать любые электроны, в том числе и обладающие очень малыми квазиимпульсами. Однако число таких электронов невелико, ибо в этой области очень мала плотность состояний (V.2.3). Основную роль играют электроны с конечными значениями p; при этом величина $\tilde{v} = \frac{E_{\lambda'} - E_{\lambda}}{p}$ обычно оказывается заметно меньше фазовой скорости света в среде c/n. Пусть, например, $E_{\lambda'} - E_{\lambda} = 1$ эВ и $n = 4$, тогда $k \simeq 10^{+5}$ см$^{-1}$. Пусть, далее, точка с энергией $E_{\lambda'}$ отстоит от края зоны на 10^{-2} эВ (при этом плотность состояний уже не слишком мала). Пусть, наконец, справедлив простой параболический закон дисперсии с эффективной

*) В дальнейшем мы будем для краткости опускать последнее слагаемое в правой части (5.2): поскольку векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ лежат в пределах первой зоны Бриллюэна, число m определяется однозначно.

массой $m = 0{,}1m_0$. Тогда $p/\hbar \sim 10^6$ см$^{-1}$, т. е. правая часть (5.3) составляет около 0,1. Эта ситуация оказывается довольно типичной: с точностью до $10 \div 15\%$ импульсом фотона можно пренебречь. Поэтому правило отбора (5.2) принимает более простой вид:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}. \tag{5.2$'$}$$

Поскольку вектор $-\mathbf{p}$ есть не что иное, как квазиимпульс дырки, то равенства (5.2), (5.2′) имеют очень простой смысл: с точностью до малой величины $\hbar\mathbf{k}$ полный квазиимпульс системы «электрон проводимости + дырка» не изменяется при рассматриваемом оптическом переходе, оставаясь равным нулю (до поглощения или после испускания фотона этот квазиимпульс, разумеется, равен нулю ввиду отсутствия обоих носителей заряда).

При условии (5.2′) правая часть равенства (5.1) принимает вид

$$\int \left(u^*_{pl'} \cdot \nabla u_{pl} + \frac{i}{\hbar}\, \mathbf{p} u^*_{pl'} u_{pl} \right) d\mathbf{r}.$$

Интеграл от второго слагаемого в скобках равен нулю: в силу (III.4.3) при $l' \neq l$ функции $u^*_{pl'}$ и u_{pl} взаимно ортогональны. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\mathbf{J}_{\lambda\lambda'} = \int u^*_{pl'} \cdot \nabla u_{pl}\, d\mathbf{r} \equiv \frac{i}{\hbar}\, \mathbf{p}_{l'l}(\mathbf{p}), \tag{5.1$'$}$$

где

$$\mathbf{p}_{l'l}(\mathbf{p}) = -i\hbar \int u^*_{pl'} \cdot \nabla u_{pl}\, d\mathbf{r} \tag{5.4}$$

есть матричный элемент оператора импульса в системе функций $u_{pl'}$, u_{pl}, вычисленный в точке $\mathbf{p}$ зоны Бриллюэна. При этом, пользуясь периодичностью указанных функций, область интегрирования в (5.4) можно ограничить пределами одной элементарной ячейки (нормируя функции $u_{pl'}$, u_{pl} в той же области).

Итак, в идеальной решетке междузонные оптические переходы происходят практически в одной и той же точке зоны Бриллюэна. Такие переходы называются *прямыми* или *вертикальными*. Смысл этого названия становится ясным из рис. 18.4, *а*, где изображены (схематически) законы дисперсии для электронов проводимости и дырок в полупроводнике типа германия. Видно, что равенство (5.2′) исключает здесь возможность поглощения фотонов с энергией, близкой к ширине запрещенной зоны. Такое поглощение, однако, становится возможным, если принять во внимание неидеальность решетки. При этом, благодаря взаимодействию носителей заряда с рассеивателями, закон сохранения квазиимпульса в форме (5.2) или (5.2′) уже не имеет места: часть квазиимпульса поставляется атомами примеси или фононами, испускаемыми при оптическом переходе. Переходы такого типа называются *непрямыми* или *невертикальными*. В материалах типа германия именно они ответственны за поглощение волн с частотой, близкой к граничной.

Будучи связаны с необходимостью взаимодействия электронов не только со светом, но и с рассеивателями, непрямые переходы менее вероятны, нежели прямые (если последние разрешены). Поэтому для них характерно заметно меньшее значение коэффициента поглощения, что и видно на рис. 18.3: область 0,7 эВ $\lesssim \hbar\omega \lesssim$ 0,8 эВ отвечает там непрямым переходам, а область $\hbar\omega \gtrsim$ 0,8 эВ — прямым.

Существуют материалы, в которых дно зоны проводимости и потолок валентной зоны располагаются в одной и той же (или почти одной и той же) точке зоны Бриллюэна. К числу таких веществ

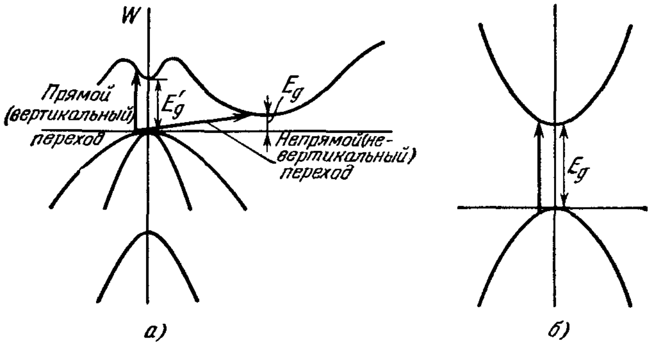

Рис. 18.4. *а*) Вертикальные и невертикальные переходы в «непрямом» полупроводнике. *б*) Вертикальный переход в «прямом» полупроводнике.

относятся, например, арсенид галлия, антимонид индия и др. Прямые переходы в них могут вызываться фотонами с энергией, сколь угодно близкой к красной границе (рис. 18.4, *б*).

О материалах двух указанных типов иногда говорят как о «непрямых» и «прямых» соответственно.

Заметим, что вывод равенства (5.2) никак не был связан с предположением о том, что переходы происходят непременно между различными зонами: последнее условие определяет только область частот ω. В случае внутризонных оптических переходов, рассмотренных в § 3, характерная скорость $\tilde{v}$ — порядка тепловой и правая часть (5.3) также мала. С другой стороны, внутризонные переходы непременно связаны с изменением квазиимпульса, т. е. они по определению невертикальные. Следовательно, они могут происходить лишь при наличии рассеяния носителей заряда, в чем мы уже убедились другим путем в § 3.

§ 6. Полупроводниковые лазеры

В § 4 мы видели, что величина и знак коэффициента поглощения света γ существенно зависят от разности $f(\lambda) - f(\lambda')$, где f — степень заполнения электронами энергетических уровней, между