

ОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

§ 8. ПРЕЛОМЛЯЮЩИЕ И ОТРАЖАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В оптических деталях оптико-механических приборов встречаются различные поверхности.

Наиболее употребительной является *сферическая* поверхность. Она образовывается путем вращения дуги с радиусом кривизны r (рис. 5,а) относительно центра вращения C с радиусом вращения R . Для образования сферической поверхности необходимо выдержать условие: $r=R$. Если радиус кривизны дуги AB равен бесконечности, то при вращении такой дуги получается *цилиндрическая* поверхность (рис. 5,б).

Цилиндрическая поверхность есть соединение частных случаев сферической поверхности. В одном сечении действует сферическая поверхность с радиусом R конечного значения, а в другом — тоже сферическая поверхность, но с $r=\infty$.

Если r конечен и не равен R , можно рассмотреть два случая: $R>r$ (рис. 5,в) и $R<r$ (рис. 5,г).

В обоих случаях образуются *торические* поверхности.

В торических поверхностях имеем два взаимно перпендикулярных главных сечения, повернутых друг относительно друга на 90° , в которых действуют как бы сферические поверхности с радиусами кривизны r и R .

Кроме сферических применяются *несферические* поверхности тел вращения. Наиболее часто встречаются поверхности второго порядка: эллипсоид, гиперболоид и параболоид вращения.

Несферические поверхности позволяют получить хорошее исправление аберраций. Так, двухлинзовый конденсор с одной несферической поверхностью дает лучший в аберрационном отношении результат, чем шестилинзовый сферический.

Торические поверхности находят применение в очковой оптике, параболические — в отражателях, эллиптические — в конденсорах и отражателях.

Несферические поверхности, удовлетворяющие уравнениям высших порядков, применяются в осветительных системах и в объективах в тех случаях, когда необходимо достигнуть особо хорошее исправление аберраций или получить более простую конструкцию.

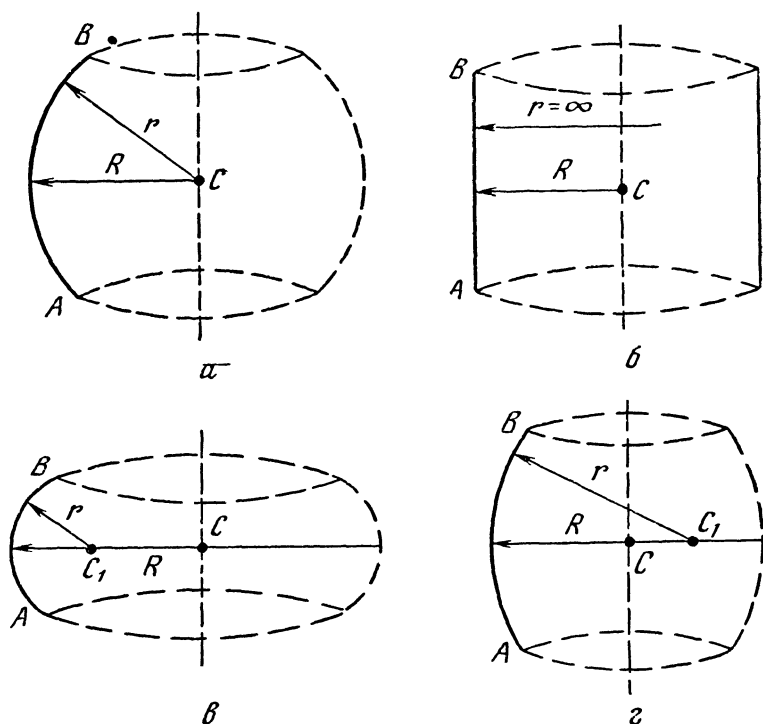


Рис 5 Виды поверхностей

§ 9. СИСТЕМА ПОВЕРХНОСТЕЙ И НУЛЕВЫЕ ЛУЧИ

Оптическая система любого прибора создается отражающими или преломляющими поверхностями, на которых происходит отражение или преломление лучей. Назначение этих поверхностей может быть различным. С их помощью получают оптическое изображение предметов, освещают те или иные объекты и т. д. По отношению друг к другу эти поверхности могут быть расположены различно.

Наличие двух и более поверхностей создает систему поверхностей. Одна из таких систем с радиусами кривизны r_1, r_2, r_3 и r_4 и центрами сферических поверхностей C_1, C_2, C_3 и C_4 показана на рис. 6. Если центры сферических поверхностей расположены на одной прямой, то такая система называется *центрированной*.

Прямая, соединяющая центры всех сферических поверхностей,

называется *оптической осью* системы. Очевидно, что луч, совпадающий с оптической осью, проходит все поверхности без преломления. Плоскость же, которая содержит оптическую ось, называется *меридиональной*. Ясно, что таких плоскостей имеется бесконечное количество. Если оптическая система в этих плоскостях обладает одинаковыми свойствами, то она называется оптической системой *круговой симметрии*. К таким системам относятся многие известные системы (фотообъективы, зрительные трубы, микроскопы), составленные из сферических поверхностей.

Центрированная система может быть образована с помощью торических или цилиндрических поверхностей, но эти системы обладают различными свойствами в двух взаимно перпендикулярных направлениях и называются оптическими системами *двоякой симметрии*.

Оптическая же система, составленная из поверхностей, центры кривизны которых не лежат на одной оптической оси, называется *кособокой*.

Преобладающая часть оптических приборов имеет центрированные оптические системы, которые и рассматриваются в дальнейшем.

Для удобства вывода различных уравнений введем понятие нулевых лучей. *Нулевыми*, или *параксиальными*, лучами называются лучи, идущие бесконечно близко к оптической оси, или под весьма малыми углами к ней. В этом случае синусы и тангенсы углов, образуемых лучами с осью, могут заменять друг друга и, кроме того, могут быть заменены значениями углов в радианах. Область, в пределах которой можно производить такие замены, называется нулевой, или параксиальной.

Формулы, выведенные для этой области на основе нулевых лучей, имеют простую математическую форму. Они также являются справедливыми и для оптической системы, в которую поступают широкие пучки лучей под большими углами к оптической оси, так как местоположение теоретического изображения одно и то же как для лучей нулевой области, так и для пучков лучей с конечными углами.

§ 10. ПРАВИЛО ЗНАКОВ

В оптике для отсчета различных отрезков и углов приняты определенные правила знаков. Они исходят из принятого за положительное направление распространения света слева направо.

Поэтому оптические системы принято изображать так, чтобы первая входная поверхность их была на рисунке слева.

1. Линейные отрезки по оси считаются положительными, если

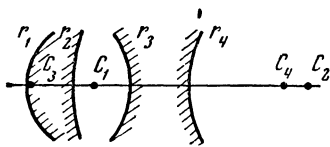


Рис. 6. Центрированная оптическая система

направление их отсчета от оптической системы совпадает с направлением света, и отрицательными, если они направлены в противоположную сторону (рис. 7,а).

2. Радиус кривизны поверхности считается положительным, если центр кривизны находится справа от поверхности, и отрицательным, если центр кривизны находится слева от поверхности (рис. 7,б).

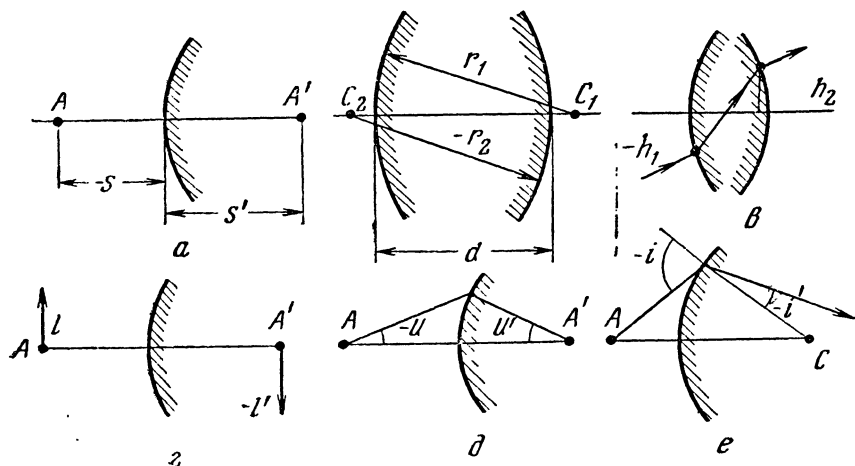


Рис. 7. Знаки отрезков и углов

3. Величины толщин линз и других оптических деталей, а также воздушных промежутков между преломляющими поверхностями d всегда считаются положительными (рис. 7,б).

4. Высоты пересечения лучей на поверхностях h и величины предметов и изображений l и l' считаются положительными вверх от оптической оси и отрицательными вниз от нее (рис. 7,в,г).

5. Угол луча с оптической осью считается положительным, если для совмещения оси с лучом ось нужно вращать по часовой стрелке, и отрицательным, если ось нужно вращать против часовой стрелки (рис. 7,д).

6. Углы между лучами и нормалью к поверхности в точке падения луча i и i' (углы падения и преломления) считаются положительными, если для совмещения нормали с лучом ее надо вращать по часовой стрелке, и отрицательными, если нормаль нужно вращать против часовой стрелки (рис. 7,е).

Знак плюс при обозначениях опускается.

7. При отражении от поверхности изменяется знак у показателя преломления n' и величины расстояния d между отражающей поверхностью и следующей за ней.

§ 11. ЛИНЕЙНОЕ УВЕЛИЧЕНИЕ

Линейным увеличением называется отношение величины изображения к величине предмета:

$$\beta = \frac{l'}{l}. \quad (11,1)$$

В сложной оптической системе линейным увеличением называется отношение величины изображения после последней преломляющей (или отражающей) поверхности к самому предмету, т. е.

$$\beta = \frac{l'_k}{l_1}. \quad (11,2)$$

Линейное увеличение иногда называют *поперечным* увеличением.

Линейное увеличение определяет масштаб изображения. Оптические системы круговой симметрии имеют одинаковое значение линейного увеличения во всех точках изображения, а оптические системы двоякой симметрии имеют различное значение линейного увеличения в двух взаимно перпендикулярных направлениях плоскости изображения.

§ 12. ГЛАВНЫЕ ТОЧКИ И ФОКУСНЫЕ РАССТОЯНИЯ

Представим себе оптическую систему, состоящую из ряда сферических поверхностей, в которой поверхности O и O' (рис. 8) являются первой и последней поверхностями, $FOO'F'$ — оптическая ось этой системы.

Любую оптическую систему можно характеризовать способностью собирать лучи в одну точку при условии, что эти лучи идут из бесконечности параллельным пучком параллельно оптической оси. Если лучи направляются в оптическую систему из пространства предметов (пространство, в котором расположены предметы), то они собираются в точке, которую называют *задним (вторым) фокусом*. Если же лучи идут из пространства изображений, то в пространстве предметов так же, как и ранее, они образуют одну точку схода, которую условились называть точкой *переднего (первого) фокуса*.

Действие всех преломляющих поверхностей для луча или лучей, идущих из бесконечности, можно свести к действию условной плоскости, перпендикулярной оптической оси, содержащей в себе точку пересечения лучей, как бы входящих в систему и выходящих из нее. На рис. 8 такой точкой является точка H_2 для лучей, идущих слева направо, а если рассматривать ход лучей справа налево, — точка H_1 . Для нахождения этих точек в оптическую систему направляют два луча, один из точки F , а второй параллельно оптической оси по направлению из M в M' . В пространстве изображений эти лучи пойдут: первый параллельно оптической

оси в M' , а второй в точку F' . Продолжение входящего и выходящего лучей дает точку пересечения их H_2 .

Затем направим в оптическую систему лучи из пространства изображений. Один — из точки F' , а второй параллельно оптической оси из M' в M . После преломления эти лучи пойдут: первый

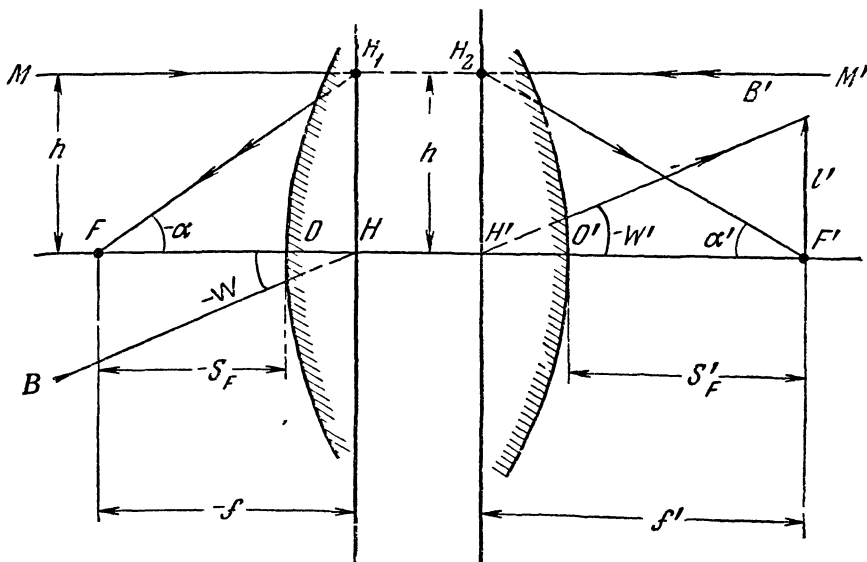


Рис 8. Главные точки и фокусные расстояния

параллельно оптической оси в M , а второй в точку F . Аналогично предыдущему, пересечение входящего и выходящего лучей дает точку пересечения их в H_1 .

Если из этих точек опустить перпендикуляры на оптическую ось, то они пересекут ее в точках H и H' . Плоскости, содержащие точки H , H_1 и H' , H_2 и перпендикулярные оптической оси, называются главными плоскостями. Точки H и H' , представляющие собой следы оптической оси на главных плоскостях, называются *передней (первой) и задней (второй) главными точками системы*. Точки H_1 и H_2 являются точками сопряженными, так как выше было показано, что в каждой из них пересекаются попарно сопряженные лучи MH_1-H_2F' и FH_1-H_2M' . Отсюда следует, что точка H_2 является изображением точки H_1 , но расстояния этих точек от оси одинаковы. Следовательно, и величины изображения в главных плоскостях одинаковы. Отсюда вытекает важное свойство главных плоскостей, определяющее их название: главными плоскостями называются плоскости, линейное увеличение в которых равно плюс единице.

Плоскость H_2H' называется *задней (второй) главной плоскостью*, а плоскость H_1H — *передней (первой) главной плоскостью*.

Расстояние от задней главной точки до заднего главного фокуса называется *задним (вторым) фокусным расстоянием*. Расстояние от передней главной точки до переднего главного фокуса называется *передним (первым) фокусным расстоянием*.

В плоскостях, перпендикулярных оптической оси, проходящих через точки фокусов F и F' , находятся изображения бесконечно удаленных предметов. Плоскость, проходящая через точку заднего фокуса, называется *задней фокальной плоскостью*, а плоскость, проходящая через точку переднего фокуса, называется *передней фокальной плоскостью*. Расстояние от вершины последней поверхности оптической системы до точки заднего фокуса называется *задним вершинным фокусным расстоянием*. Расстояние от вершины первой поверхности оптической системы до точки переднего фокуса называется *передним вершинным фокусным расстоянием*.

Знаки главных фокусных расстояний f и f' и вершинных фокусных расстояний s_F и s'_F всегда соответствуют правилу знаков. Фокусные расстояния (переднее и заднее) отсчитываются от главных плоскостей, а вершинные — от вершин сферических поверхностей.

Оптическая система характеризуется знаком заднего фокусного расстояния. Если заднее фокусное расстояние имеет знак плюс, то такая система называется *положительной*, или *собирающей*, если — минус, то *отрицательной*, или *рассеивающей*.

Из рис. 8 следует:

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha'}, \quad (12,1)$$

$$f = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (12,2)$$

Фокусное расстояние может быть выражено и через величину изображения l' . Луч VH из пространства предметов направляется в переднюю главную точку H под углом ω . Так как линейное увеличение в главных точках равно $+1$, то луч выйдет из задней главной точки H' под углом ω' , равным ω . Здесь предполагаем, что оптическая система расположена в однородной среде, например в воздухе, т. е. $n=n'=1$.

Луч $H'B'$ образует в задней фокальной плоскости изображение величиной l' .

Из рис. 8 легко получаем

$$f' = -\frac{l'}{\operatorname{tg} \omega'}, \quad (12,3)$$

а так как $-f = f'$, то и

$$f = \frac{l'}{\operatorname{tg} \omega'}, \quad (12,4)$$

или, так как $\omega = \omega'$, то

$$f' = -\frac{l'}{\operatorname{tg} \omega}. \quad (12,5)$$

Величина заднего фокусного расстояния является основным параметром, которым принято характеризовать любую оптическую систему.

Оптическая система, для которой толщины линз и воздушных промежутков приняты равными нулю, называется *тонкой*. Для тонкой системы показывают не две главные плоскости, а одну, в которой как бы сливаются вместе передняя и задняя.

§ 13. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Сферическая поверхность O с радиусом кривизны r (рис. 9) разделяет две оптические среды с показателями преломления n и n' . Предмет расположен в точке A на расстоянии s от поверх-

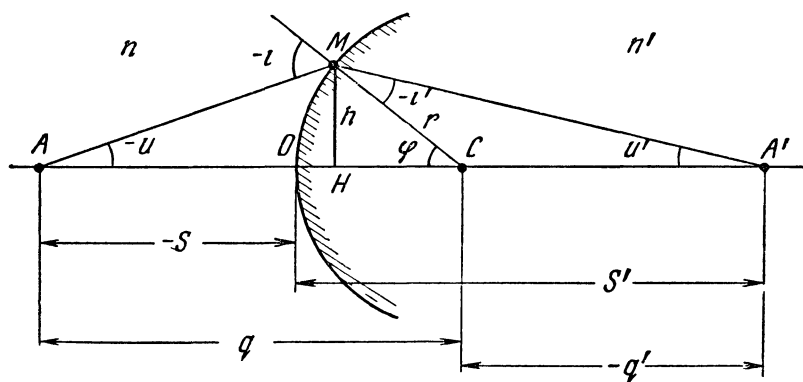


Рис 9 Сферическая преломляющая поверхность

ности, а его изображение — в точке A' на расстоянии s' от той же поверхности. Луч света из точки A направляется на сферическую поверхность в точку M под конечным углом u . Луч падающий и луч преломленный с перпендикуляром MC образуют углы i и i' . Высота падения луча на поверхность h . Преломленный луч направляется в точку A' под углом u' .

Обозначим расстояние от точек предмета A и изображения A' до центра кривизны C через q и q' .

Знаки величин указаны в соответствии с правилом знаков. Сферическая поверхность O разделяет два пространства — пространство предметов и пространство изображений.

Начальными данными для вычисления преломления луча на поверхности являются расстояние предмета от поверхности s и угол u , под которым луч направляется на поверхность.

Для вычисления преломления луча необходимо знать значение кривизны поверхности и значения показателей преломления оптических сред, разделенных этой поверхностью

Искомыми данными являются положение изображения за поверхностью s' и угол u' , под которым луч выходит из поверхности.

Рассмотрим преломление действительного луча на одной сферической поверхности. Из рис. 9 следует

$$q = r - s. \quad (13,1)$$

Из тр-ка AMC по формуле синусов имеем

$$-\frac{r}{\sin u} = \frac{q}{\sin(180^\circ + i)},$$

или

$$\sin i = \frac{q \sin u}{r}. \quad (13,2)$$

Угол преломления i' найдем из закона преломления (6,1)

$$\sin i' = \frac{n \sin i}{n'}. \quad (13,3)$$

Из тр-ка AMC имеем:

$$-i = \varphi - u,$$

а из тр-ка CMA' :

$$\varphi = u' - i'.$$

Отсюда

$$u' = u + i' - i. \quad (13,4)$$

По формуле синусов, из тр-ка CMA' имеем:

$$q' = \frac{r \sin i'}{\sin u'}. \quad (13,5)$$

и, наконец, как видно из рисунка,

$$s' = r - q'. \quad (13,6)$$

Формулы (13,1)—(13,6) являются основными для вычисления преломления луча на одной поверхности

Если оптическая система состоит из нескольких поверхностей, то необходимо последовательно выполнить аналогичные вычисления через все поверхности. При этом $u_1' = u_2$; $u_2' = u_3$ и т. д. Точка изображения после

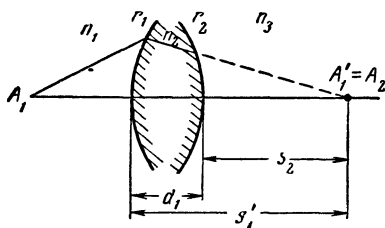


Рис 10 К определению положения предмета для второй поверхности

первой поверхности будет являться точкой предмета для второй поверхности и т. д. Рис. 10 поясняет переход с первой поверхности на вторую (здесь и в дальнейшем преломляющая поверхность обозначается индексом, характеризующим радиус кривизны этой поверхности). Легко видеть, что

$$s_2 = s'_1 - d_1. \quad (13,7)$$

Для удобства прохождения луча через систему поверхностей вышеуказанные формулы изображают в виде схем (см. схему 4, § 41).

Высоту луча на поверхности можем найти из тр-ка MHC (рис. 9):

$$h = r \sin(u' - i'). \quad (13,8)$$

Предположим, что луч AM является нулевым.

Из уравнений (13,2) и (13,5) следует:

$$\frac{q \sin u}{\sin i} = \frac{q' \sin u'}{\sin i'}.$$

Подставив сюда уравнения (13,1), (13,3) и (13,6) и заменив $\sin u$ и $\sin u'$ на u и u' соответственно, причем $u = \frac{h}{s}$, а $u' = \frac{h}{s'}$, получим

$$\frac{u(r-s)}{s} = \frac{u'(r-s')}{s'}.$$

Разделив обе части равенства на r , получим

$$n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right). \quad (13,9)$$

Это выражение носит название «нулевого» инварианта Аббе. Открыв скобки, получим последнее выражение в иной форме:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \quad (13,10)$$

В таком виде это уравнение называется *уравнением нулевого луча*.

Из уравнения (13,9) можем найти фокусные расстояния одной поверхности. Предположим, что луч идет на поверхность из бесконечности, тогда $s = -\infty$, а $s' = f'$. Подставляя эти равенства в формулу (13,9), получим

$$-\frac{n}{r} = n' \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{r} \right),$$

или заднее фокусное расстояние

$$f' = \frac{n'r}{n' - n}. \quad (13,11)$$

Если же $s' = \infty$, то $s = f$ и из уравнения (13,9) переднее фокусное расстояние

$$f = -\frac{nr}{n' - n}. \quad (13,12)$$

Разделив выражение (13,11) на (13,12), получим зависимость между фокусными расстояниями и показателями преломления

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \quad (13,13)$$

Эту зависимость, найденную для одной поверхности, можно распространить и на систему, состоящую из ряда поверхностей.

В однородной среде фокусные расстояния оптической системы, переднее и заднее, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Если же первая и последняя оптические среды не одинаковы, что имеет место, например, если линза или объектив опущены в воду, то абсолютное значение фокусного расстояния зависит от величины радиуса кривизны первой поверхности. Отношение же переднего и заднего фокусных расстояний определяется уравнением (13,13).

Например в случае, когда линза с радиусами кривизны $r_1 = 17,58$ и $r_2 = -21,03$; $d = 5$ и $n = 1,5467$, имеющая фокусное расстояние $f' = 18,35$ мм, опущена в воду так, что с водой ($n = 1,33$) соприкасается поверхность с радиусом r_1 , тогда $f = -35,67$ и $f' = 26,82$ мм. Если же с водой соприкасается поверхность с радиусом r_2 , то $f = -32,95$ и $f' = 24,77$ мм. Также изменяется и местоположение изображения. В этих случаях отношение f'/f равно $-1,33$.

Вернемся к рис. 9 и установим зависимость между углами i и i' для нулевого луча. Эти углы в параксиальной области обозначим через α .

Закон преломления напишем в виде

$$ni = n'i'.$$

Так как $i = \alpha - \varphi$, а $i' = \alpha' - \varphi$, можем записать

$$n(\alpha - \varphi) = n'(\alpha' - \varphi).$$

Подставим сюда выражение $\varphi = \frac{h}{r}$ и откроем скобки

$$n\alpha - \frac{nh}{r} = n'\alpha' - \frac{n'h}{r}$$

и после преобразования окончательно получим

$$\alpha' = \frac{n}{n'}\alpha + \frac{h(n' - n)}{rn'}. \quad (13,14)$$

Таким образом, мы получили уравнение углов нулевого луча.

Переходя к индексам поверхностей, уравнение (13,14) перепишем в виде

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + \frac{h_k (n_{k+1} - n_k)}{r_k n_{k+1}}. \quad (13,15)$$

Отсюда получим формулу радиуса

$$r_k = \frac{h_k (n_{k+1} - n_k)}{\alpha_{k+1} n_{k+1} - \alpha_k n_k}. \quad (13,16)$$

Схема вычисления радиусов кривизны приведена в § 41 (схема 2).

Если в уравнении (13,16) положить

$$\alpha_k n_k = \gamma_k, \quad (13,17)$$

то оно примет вид

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k}. \quad (13,18)$$

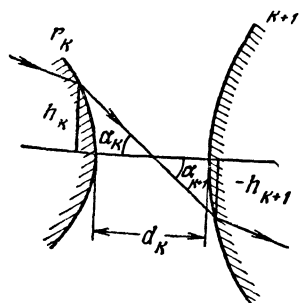
В таком виде эта формула, развернутая в схему, дает возможность наиболее просто производить вычисление прохождения нулевого луча через сложную оптическую систему.

Для вычисления хода луча, кроме того, необходимо знать формулу определения высоты h .

Луч (рис. 11) падает на поверхность с радиусом кривизны r_k на высоте h_k , после преломления встречает поверхность с радиусом кривизны r_{k+1} на высоте h_{k+1} . Расстояние между поверхностями d_k .

Так как луч нулевой, то практически расстояние между вершиной поверхности и следом перпендикуляра (высоты) на оптической оси для каждой поверхности равно нулю.

Рис 11. К выводу формулы высот



Итак,

$$\frac{h_k - h_{k+1}}{d_k} = \alpha_{k+1}.$$

Преобразуя, получим

$$h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} d_k. \quad (13,19)$$

Схема вычисления нулевого луча приведена в § 41 (схема 3).
Пример 3. Определить местоположение щели спектрального прибора, освещаемого источником света с помощью конденсорной линзы, если расстояние от источника света до линзы равно 80 мм, а линза имеет конструктивные элементы $r_1 = 40$ мм, $r_2 = -40$ мм, $d = 5$ мм и $n = 1,5163$.

Решение. Из формулы (13,10) следует

$$s' = \frac{n'rs}{s(n' - n) + rn},$$

тогда, подставив формулу (13,7), получим

$$s'_1 = \frac{n_2 r_1 s_1}{s_1(n_2 - n_1) + r_1 n_1}.$$

Для 1-й поверхности имеем: $r_1 = 40$; $n_1 = 1$; $n_2 = 1,5163$; $s_1 = -80$; после подстановки получим

$$s'_1 = 3720,98.$$

Для 2-й поверхности предметом является изображение, полученное после 1-й поверхности:

$$s_2 = s'_1 - d = 3715,98,$$

и аналогично при $r_2 = -40$; $n_2 = 1,5163$; $n_3 = 1$

$$s'_2 = \frac{n_3 r_2 s_2}{s_2(n_3 - n_2) + r_2 n_2} = 75,1 \text{ мм.}$$

Пример 4. Вычислить углы нулевого луча с оптической осью для случая, приведенного в примере 3.

Решение. Дано:

$$\begin{aligned} r_1 &= 40 \text{ мм} & n_1 &= 1 \\ d &= 5 \text{ мм} & n_2 &= 1,5163 & s_1 &= -80 \\ r_2 &= -40 \text{ мм} & n_3 &= 1 \end{aligned}$$

Применим формулы (13,18), (13,19) и (13,17):

$$\gamma_1 = \alpha_1 n_1, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \frac{\hat{h}_1}{s_1}.$$

Положим для удобства вычислений $h_1 = r_1$.

$$\gamma_1 = \frac{n_1 h_1}{s_1} = -0,5, \quad \gamma_2 = \gamma_1 + h_1 \frac{n_2 - n_1}{r_1} = 0,0163.$$

В формуле (13,19) заменим α на γ :

$$h_{k+1} = h_k - \frac{\gamma_{k+1} d_k}{n_{k+1}},$$

иначе

$$h_2 = h_1 - \frac{\gamma_2 d_1}{n_2} = 39,946,$$

и, наконец,

$$\gamma_3 = \gamma_2 + h_2 \frac{n_3 - n_2}{r_2} = 0,5319.$$

Известное γ_3 позволяет получить положение изображения. Так как

$$\frac{h_k}{s_k} = \alpha_{k+1}, \text{ то } s'_k = \frac{h_k n_{k+1}}{\gamma_{k+1}},$$

т. е.

$$s'_2 = 75,1 \text{ мм.}$$

Углы нулевого луча α найдутся путем деления соответствующего γ на показатель преломления: $\alpha_1 = -0,5$, $\alpha_2 = 0,01075$, $\alpha_3 = 0,5319$.

Обычно принято приводить α к последнему, равному 1, для чего необходимо все углы разделить на последний угол, т. е. получим окончательно $\alpha_1 = -0,94$; $\alpha_2 = 0,0202$; $\alpha_3 = 1$.

§ 14. УРАВНЕНИЕ ГЮЙГЕНСА—ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пучок нулевых лучей, вышедший из точки A плоскости предмета P (рис. 12), после преломления поверхностью с радиусом кривизны r образует изображение в точке A' , плоскости изображения P' .

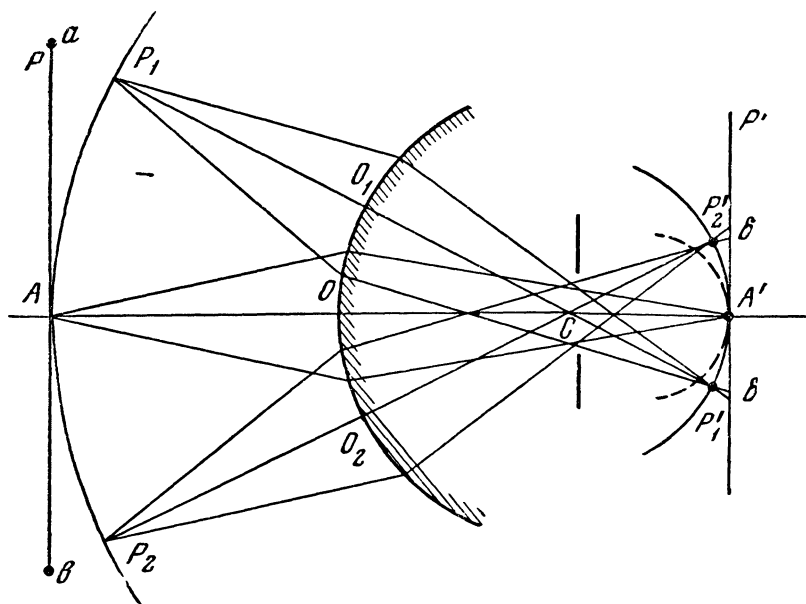


Рис 12 Образование изображения одной сферической поверхностью

Рассмотрим образование гомоцентрическими пучками лучей точек изображения, удаленных от оптической оси.

Повернем условно оптическую ось AOC вокруг центра кривизны поверхности C так, чтобы она последовательно занимала

положения $P_1P'_1$ и $P_2P'_2$. Поверхность предметов представлена дугой P_1AP_2 , а поверхность изображения дугой $P'_1A'P'_2$.

Легко видеть, что изображение точек a и b , более удаленных от поверхности, чем точки P_1 и P_2 , будет находиться ближе к поверхности, например на дуге, показанной пунктиром.

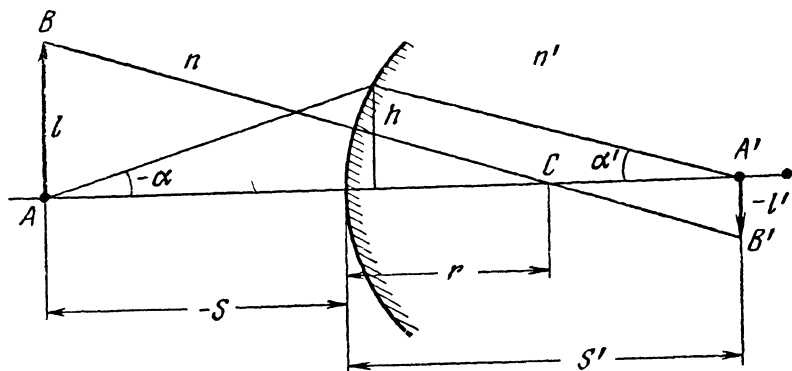


Рис 13 Образование точки вне оптической оси

Таким образом, плоская поверхность предметов P не может изображаться плоской поверхностью изображения P' , а изображения точек a и b будут представлены в плоскости P' в виде кружков рассеяния δ .

Только изображения весьма небольшой части предметов вблизи точки A , расположенных перпендикулярно оптической оси, можно рассматривать в виде плоских перпендикулярных оптической оси изображений около точки A' .

В области нулевых лучей пренебрегают неспособностью сферической поверхности образовывать плоское изображение достаточных размеров и полагают, что любые пространства вне оптической оси изображаются сопряженными лучами в виде подобных же пространств: плоскость — в виде плоскости.

Из точки A (рис. 13) выходит луч под углом α и после преломления на поверхности с радиусом кривизны r пересекает оптическую ось в точке A' . Точки A и A' есть точки сопряженные. Тогда плоскость предметов, содержащая l , должна быть оптически сопряжена с плоскостью изображений, содержащей l' .

Для определения величины изображения из точки B направим луч на преломляющую поверхность по ее радиусу. Этот луч пройдет через поверхность без преломления и в точке B' образует изображение.

Из подобия треугольников ABC и $A'B'C$ следует

$$\frac{l'}{l} = \frac{r-s'}{r-s}.$$

Уравнение (13,9) можем представить в ином виде, приведя выражения в скобках к общему знаменателю:

$$n \left(\frac{s-r}{s} \right) = n' \left(\frac{s'-r}{s'} \right),$$

или

$$\frac{s'-r}{s-r} = \frac{ns'}{n's}.$$

Следовательно,

$$\frac{l'}{l} = \frac{ns'}{n's}, \quad (14,1)$$

где

$$s = \frac{h}{\alpha} \quad \text{и} \quad s' = \frac{h}{\alpha'}.$$

Подставляя s и s' в выражение (14,1) и сокращая на h , получим

$$n'l'\alpha' = n\alpha. \quad (14,2)$$

Это выражение имеет вид инварианта и называется уравнением Гюйгенса—Гельмгольца*.

Так как для сложной системы $l'_1 = l_2, \dots, l'_{k-1} = l_k; n'_1 = n_2, \dots, n'_{k-1} = n_k$ и $\alpha'_1 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{k-1} = \alpha_k$, то можем написать

$$n_1 l_1 \alpha_1 = n_2 l_2 \alpha_2 = \dots = n_{k+1} l_{k+1} \alpha_{k+1}. \quad (14,3)$$

Произведение показателя преломления на ординату изображения и угол луча с осью в точке изображения на оптической оси для всех поверхностей системы является величиной постоянной.

Пример 5. Определить величину изображения, даваемого линзой с конструктивными элементами: $r_1=40$; $r_2=-40$; $d=5$ и $n=1,5163$, если она освещает щель спектрального прибора с помощью источника света, расположенного от линзы на расстоянии 80 мм (условия примеров 3 и 4). Величина светового тела источника света 6 мм.

Решение. Воспользуемся данными, полученными в примере 4, т. е.

$$\alpha_1 = -0,94; n_1 = 1; \alpha_3 = 1; n_3 = 1.$$

Из формулы (12,3) следует

$$l_3 = \frac{n_1 l_1 \alpha_1}{n_3 \alpha_3}.$$

Величина предмета $l_1=6$ мм, тогда

$$l_3 = -5,64 \text{ мм.}$$

* До недавнего времени это уравнение называли уравнением Лагранжа — Гельмгольца.

§ 15. УГЛОВОЕ УВЕЛИЧЕНИЕ

Угловым увеличением называется отношение тангенса угла в пространстве изображений, под которым луч выходит из оптической системы к оптической оси, к тангенсу сопряженного угла в пространстве предметов (рис. 13):

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (15,1)$$

Уравнение (14,2) представим в виде

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{nl}{n'l'}.$$

Отношение l' к l есть линейное увеличение β . При малости углов α и α' можем написать

$$\gamma = \frac{n}{n'\beta},$$

или

$$\gamma = \frac{n_1}{n_{k+1}} \cdot \frac{1}{\beta}. \quad (15,2)$$

Угловое увеличение обратно пропорционально линейному и зависит от показателей преломления первой и последней оптических сред.

Следует отметить, что линейное увеличение принято определять с помощью углов нулевого луча с оптической осью, тогда на основании (15,2) имеем

$$\beta = \frac{n_{k+1}}{n_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}. \quad (15,3)$$

Чаще всего оптическая система располагается в однородной среде (в воздухе), тогда $n_{k+1} = n_1$, а последний угол луча с осью принимается равным единице ($\alpha_{k+1} = 1$), тогда $\beta = \alpha_1$.

Соответственные точки предмета и изображения, угловое увеличение в которых равно плюс единице, называются узловыми. Если оптическая система расположена в однородной среде, то узловые точки совпадают с главными.

§ 16. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В оптических приборах часто применяются детали с плоскими преломляющими поверхностями.

К их числу относятся отражательные и преломляющие призмы, клинья, светофильтры, защитные стекла, сетки, зеркала с внутренним серебрением, плоско-выпуклые и плоско-вогнутые линзы и другие детали.

Плоские поверхности всегда тем или иным способом влияют на ход лучей в оптической системе.

Можно указать лишь на один случай, когда плоская поверхность не оказывает влияния на ход лучей—это случай, когда лучи падают параллельными пучками перпендикулярно к поверхности. Тогда они проходят ее без преломления, так как $i=i'=0$.

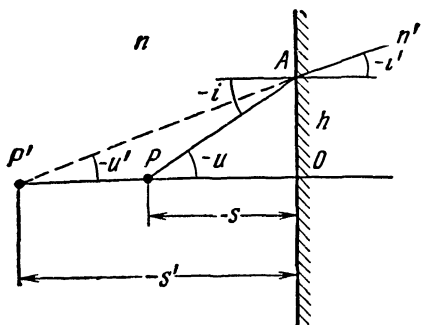


Рис. 14. Плоская преломляющая поверхность

Но в практике такие случаи весьма редки, так как оптические приборы имеют обычно определенное поле зрения, и, кроме пучков лучей, идущих параллельно оптической оси, существуют пучки, идущие под углом к оси.

Плоская поверхность с радиусом кривизны $r=\infty$ (рис. 14) разделяет две оптические среды с показателями преломления n и n' . Предмет расположен в точке P . В точке P' расположено мнимое изображение.

Угол луча с осью u равен углу падения i , а угол u' после преломления равен углу преломления i' , определяемому из уравнения (6,1).

Из решения тр-ков AOP и AOP' , опирающихся на одну и ту же высоту h , имеем

$$s' = \frac{s \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'}. \quad (16,1)$$

Искомыми величинами являются u' и s' . Знание этих величин позволяет перейти к вычислению прохождения луча через следующую поверхность.

§ 17. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧА ЧЕРЕЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ

Плоскопараллельной пластиной называется оптическая деталь круглой или какой-либо другой формы, ограниченная с двух сторон полированными плоскими поверхностями, параллельными друг

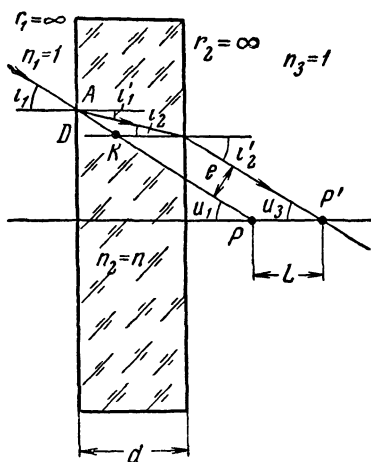


Рис 15. Преломление луча через плоскопараллельную пластинку

другу. Любая из нормалей к поверхности может быть оптической осью, однако обычно таковой бывает ось симметрии детали.

Пучок лучей, ограниченный лучом AP (рис. 15) и лучом, идущим по оптической оси, пересекается в точке P . Эта точка является точкой предмета для пластины. Луч, идущий по оптической оси, встретив пластину, проходит дальше без преломления. Луч AP в точке A преломляется и встречает вторую поверхность в точке B . После преломления на второй поверхности луч направляется в точку P' , где образует изображение точки P .

Нетрудно показать, что $u_1 = u_3$, т. е. луч при преломлении в пластинке не меняет своего направления, а лишь смещается. Действительно, $i_1 = u_1$ и $i'_1 = i_2$. Тогда и $i_1 = i'_2$, а следовательно, и $u_1 = u_3$.

Отрезок PP' определяет величину смещения луча L . Из рис. 15 $L = DB - DK = d - AD \operatorname{ctg} i_1$. Но $AD = d \operatorname{tg} i'_1$, тогда

$$L = d \left(1 - \frac{\operatorname{tg} i'_1}{\operatorname{tg} i_1} \right). \quad (17,1)$$

Найдем предел этого отношения при $i_1 \rightarrow 0$:

$$\lim_{i_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} i'_1}{\operatorname{tg} i_1} \right) = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$L_0 = \frac{n-1}{n} d. \quad (17,2)$$

Последнее уравнение есть уравнение смещения нулевого луча плоскопараллельной пластиной вдоль оптической оси.

Представляет интерес также величина поперечного смещения e луча, вышедшего из пластины, по отношению к падающему.

Из рис. 15 следует, что $e = AB \sin(i_1 - i'_1)$, но

$$AB = \frac{d}{\cos i'_1},$$

значит,

$$e = \frac{d \sin(i_1 - i'_1)}{\cos i'_1}.$$

После преобразования путем замены i'_1 по уравнению (6,1) получим удобную формулу для определения $e = f(d, n, i_1)$:

$$e = d \sin i_1 \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \right). \quad (17,3)$$

Формула (17,3) устанавливает связь между поперечным смещением e и углом поворота пластины i_1 .

Если пластина располагается в строго параллельном ходе лучей, то вызываемое ею смещение лучей в поперечном направлении и вдоль оптической оси не существенно.

Введение пластины в ход лучей оптического прибора, в область сходящихся или расходящихся пучков лучей, вызывает смещение изображения и нарушает ранее выполненную юстировку оптики прибора.

Пример 6. В зрительной трубе расстояние между объективом и окуляром составляет 185 мм. В это пространство понадобилось установить сетку (плоскопараллельную пластинку) толщиной 5 мм из стекла с показателем преломления $n=1,5163$. Определить необходимое новое расстояние между объективом и окуляром, сохраняющее то же состояние юстировки оптической системы, что и до введения сетки.

Решение. Определим величину смещения луча плоскопараллельной пластиной по формуле (17,2):

$$L_0 = \frac{n-1}{n} d = 1,7 \text{ мм.}$$

Новое расстояние между объективом и окуляром равно сумме старого и величине смещения L_0 , т. е. 186,7 мм.

Пример 7. Качающаяся плоскопараллельная пластина установлена в ходе лучей микроскопа перед сеткой, в пространстве между объективом и окуляром. Пластина толщиной 6 мм из стекла с $n=1,5688$ наклонена к оптической оси под углом 30° . Определить величину поперечного смещения луча.

Решение. Применим формулу (17,3), зная, что $i_1=30^\circ$, тогда $e=1,25 \text{ мм}$.

§ 18. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧА ЧЕРЕЗ КЛИН

Оптическая деталь, ограниченная с двух сторон преломляющими плоскими поверхностями, составляющими друг с другом некоторый угол, называется *преломляющей призмой*.

Клин называется призма, ограниченная двумя преломляющими плоскостями с малым углом между ними.

Клинья применяются в приборах для измерения углов (дальномеры), для юстировки оптических систем, для сведения окулярных осей и для решения других задач.

Под малым преломляющим углом понимается угол не более 6° .

Из рис. 16 легко установить зависимость между преломляющим углом σ и углом отклонения ω .

Принимая $\sin \sigma = \sigma$ и зная, что $i_2 = \sigma$, получим

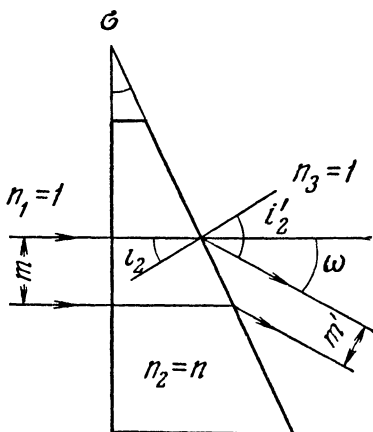


Рис. 16. Клин

$$\omega = (n - 1) \sigma. \quad (18,1)$$

Для определения дисперсии клина в эту формулу подставим вместо n показатели преломления различных длин волн, тогда для лучей спектра F и C будем иметь

$$d\omega = \omega_F - \omega_C = (n_F - 1)\sigma - (n_C - 1)\sigma.$$

После преобразования

$$d\omega = (n_F - n_C)\sigma, \quad (18,2)$$

или в общем случае

$$d\omega = (n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2})\sigma. \quad (18,3)$$

При прохождении лучей через клин происходит сжатие пучка. Если перед клином размер пучка m (рис. 16), то после преломления его размер m' .

Степень сжатия пучка определяется коэффициентом *анаморфирования* или коэффициентом *трансформирования* (более подробно см. § 52), который для призмы или системы призм выражается уравнением

$$A = \prod_{k=1}^{k=m} \frac{\cos i_k}{\cos i'_k}. \quad (18,4)$$

Пример 8. Определить угол отклонения и угловую дисперсию клина с преломляющим углом 6° из оптического стекла марки К8.

Решение. Из каталога оптического стекла для марки К8 имеем: $n_D = 1,5163$, $n_F = 1,52195$, $n_C = 1,51389$.

Угол отклонения найдем по формуле (18,1)

$$\omega = 0,05421.$$

¹ Угловая дисперсия, согласно (18,2),

$$d\omega = 0,000846.$$

Таким образом, $\omega = 3^\circ 06' 20''$, $d\omega = 0^\circ 02' 14''$.

§ 19. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧА НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Применение несферических поверхностей в оптических системах открывает новые возможности для достижения высокого качества изображения. Такие поверхности применяются в конденсорах для проекции и микроскопии, в фотографических объективах, в прожекторах и других приборах. Наиболее часто применяются параболы, эллиптические, гиперболические поверхности. Применяются и поверхности, удовлетворяющие уравнениям высшего порядка.

При определении положения изображения в параксиальной области несферические поверхности заменяют сферическими, но определение хода действительного луча в меридиональной плоскости требует особого метода вычисления.

Допустим, что кривая несферической поверхности с радиусом кривизны r_k в данной точке определяется уравнением $x=f(y)$, выраженным в прямоугольных координатах с центром в вершине несферической поверхности.

Несферическая поверхность с вершиной O_k расположена среди сферических поверхностей на расстоянии от последних d_{k-1} и d_k (рис. 17).

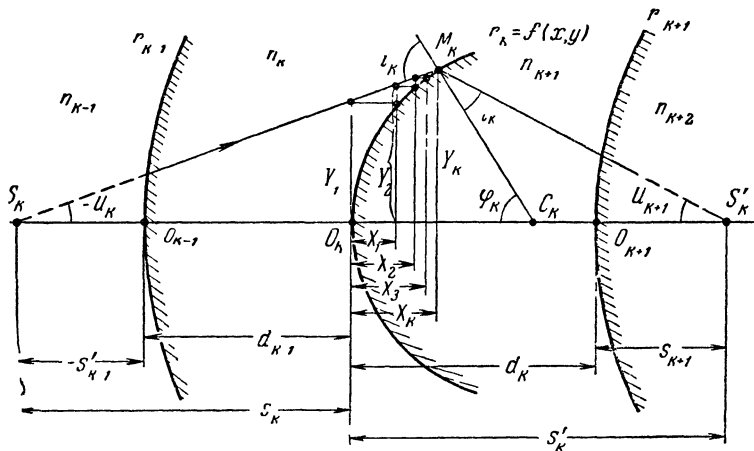


Рис. 17. Несферическая поверхность

Вычисление действительного луча в меридиональной плоскости через сферические поверхности производится по обычным схемам. Луч света $S_k M_k$ по выходе из поверхности с вершиной O_{k-1} имеет параметры u_k и s'_{k-1} .

Для несферической поверхности, заданной уравнением $x=f(y)$, начальными параметрами являются u_k и $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$. Примем для анализа вид уравнения несферической поверхности

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + Ey^{10} + Fy^{12}.$$

Основным содержанием метода вычисления луча через несферическую поверхность является отыскание точки встречи луча несферической поверхности путем определения y , остающегося практически неизменными при изменении x .

Из рис. 17 следует

$$y_1 = s_k \operatorname{tg} u_k. \quad (19,1)$$

Ординате y_1 соответствует абсцисса x_1 , определяемая уравнением

$$x_1 = Ay_1^2 + By_1^4 + Cy_1^6 + Dy_1^8 + Ey_1^{10} + Fy_1^{12}. \quad (19,2)$$

Высоты луча, соответствующие абсциссам x , определяются из выражений:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 - x_1 \operatorname{tg} u_k, \\ y_3 &= y_1 - x_2 \operatorname{tg} u_k, \\ y_4 &= y_1 - x_3 \operatorname{tg} u_k \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (19,3)$$

Величины x_2, x_3 и т. д., соответствующие ординатам y_2, y_3 и т. д., определяются по уравнениям, аналогичным уравнению (19,2), до тех пор, пока величина y_k практически не окажется неизменной.

Практика вычислений показывает, что для шестичленного уравнения необходимое приближение достигается на 4-й или 5-й вариант расчета.

После отыскания точки встречи луча с поверхностью в виде ординаты y_k и абсциссы x_k определяется тангенс угла между оптической осью и касательной в точке встречи через первую производную. В нашем случае, учитывая вид уравнения $x=f(y)$, будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi_k = 2Ay_k + 4By_k^3 + 6Cy_k^5 + 8Dy_k^7 + 10Ey_k^9 + 12Fy_k^{11}. \quad (19,4)$$

Из треугольника $S_k M_k C_k$ находим

$$i_k = u_k - \varphi_k. \quad (19,5)$$

Угол преломления находим из оптического инварианта

$$\sin i'_k = \frac{n_k \sin i_k}{n_{k+1}}. \quad (19,6)$$

Из треугольника $S_k M_k S'_k$ находим угол u_{k+1} :

$$u_{k+1} = \varphi_k + i'_k,$$

и, наконец,

$$s'_k = x_k + \frac{y_k}{\operatorname{tg} u_{k+1}}. \quad (19,7)$$

Затем производится вычисление луча по обычным формулам сферической поверхности, для чего находим

$$s_{k+1} = s'_k - d_k.$$

Величины s_{k+1} и u_{k+1} являются начальными параметрами для последующего вычисления через сферические поверхности.

Вычисление луча по формулам (19,1)—(19,7) удобно выполнять по схеме 1.

Для изготовления несферических поверхностей известно много способов, а для контроля качества их изготовления уже применяются интерференционные методы, что позволит в ближайшем будущем широко применять несферические поверхности в оптических приборах.

§ 20. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧА ЧЕРЕЗ ЛИНЗУ

Линза с радиусами кривизны поверхностей r_1 и r_2 (рис. 18), толщиной d , из стекла с показателем преломления n образует изображение бесконечно удаленной точки, расположенной на оптической оси линзы в точке F' , точке заднего фокуса. Определим фокусные расстояния и положения главных плоскостей в линзе.

Воспользуемся формулами (12,1), (13,15) и (13,19):

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 = \frac{n_2}{n_3} \alpha_2 + \frac{h_2(h_3 - h_2)}{r_2 n_3} \quad \text{и} \quad h_2 = h_1 - \alpha_2 d_1.$$

В нашем случае $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$ и $\alpha_1 = 0$. Примем $h_1 = r$, тогда, подставив эти выражения в уравнение для α_3 , окончательно получим

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n-1)^2}{nr_1 r_2}. \quad (20,1)$$

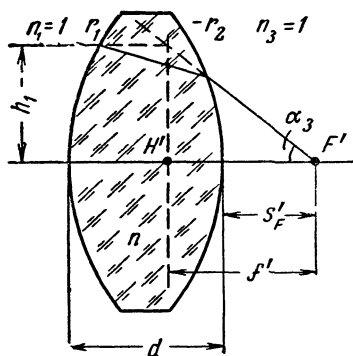


Рис. 18. Линза

Заднее вершинное фокусное расстояние s'_F найдется из выражения

$$\alpha_3 = \frac{h_2}{s'_F},$$

т. е. с учетом $h_2 = r_1 - \alpha_2 d$

$$s'_F = f' \left[1 - \frac{(n-1)d}{nr_1} \right], \quad (20,2)$$

и переднее вершинное фокусное расстояние аналогично

$$s_F = f' \left[1 + \frac{(n-1)d}{nr_2} \right]. \quad (20,3)$$

Положение главных плоскостей s_H и s'_H найдется из выражений $s_H = s_F - f$ и $s'_H = s'_F - f'$, т. е.

$$s_H = - \frac{f'(n-1)d}{nr_2} \quad (20,4)$$

и

$$s'_H = - \frac{f'(n-1)d}{nr_1}. \quad (20,5)$$

Пример 9. Найти фокусное расстояние, вершинные фокусные расстояния и положения главных плоскостей линзы, имеющей конструктивные элементы: $r_1 = 17,58$ мм, $r_2 = -21,03$ мм, $d = 5$ мм, $n = 1,5467$.

Решение. Применив формулу (20,1), получим

$$\frac{1}{f'} = 0,054495,$$

$$-f = f' = 18,35 \text{ мм.}$$

Вершинные расстояния найдем по формулам (20,2) и (20,3)

$$s'_F = 16,57 \text{ мм, } s_F = -16,81 \text{ мм.}$$

Схема 1

Схема вычисления луча через линзу с несферической поверхностью, заданной уравнением вида:

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Ey^8 + Fy^{10} + Gy^{12}.$$

$$r_1 = f(x, y)$$

Дано: $d_1 \ n_2 \ s_1, u_1; \ s'_0, \beta.$

$$r_2 = \infty$$

			n_1	
			$d_1 \ n_2 \ s_1, u_1; \ s'_0, \beta.$	
			n_3	
$2 \lg y_1$	$2 \lg y_2$	$2 \lg y_3$	$\lg y_4$	$\lg \sin i_1$
$\lg A$	$\lg A$	$\lg A$	$\lg 2$	$\lg(n_1 \ n_2)$
$\lg a_1$	$\lg a_2$	$\lg a_3$	$\lg \rho$	$\lg \sin i'_1$
$4 \lg y_1$	$4 \lg y_2$	$4 \lg y_3$	$3 \lg y_4$	i'_1
$\lg B$	$\lg B$	$\lg B$	$\lg 4$	Φ_1
$\lg b_1$	$\lg b_2$	$\lg b_3$	$\lg B$	u_2
$6 \lg y_1$	$6 \lg y_2$	$6 \lg y_3$	$\lg q$	$\lg y_4$
$\lg C$	$\lg C$	$\lg C$	$5 \lg y_4$	$\text{clg tg } u_2$
$\lg c_1$	$\lg c_2$	$\lg c_3$	$\lg 6$	$\lg m$
$8 \lg y_1$	$8 \lg y_2$	$8 \lg y_3$	$\lg C$	m
$\lg E$	$\lg E$	$\lg E$	$\lg t$	x_1
$\lg e_1$	$\lg e_2$	$\lg e_3$	$7 \lg y_4$	s_1
$10 \lg y_1$	$10 \lg y_2$	$10 \lg y_3$	$\lg 8$	$-d_1$
$\lg F$	$\lg F$	$\lg F$	$\lg E$	s_2
$\lg f_1$	$\lg f_2$	$\lg f_3$	$\lg \theta$	
$12 \lg y_1$	$12 \lg y_2$	$12 \lg y_3$	$9 \lg y_1$	$\lg \sin u_2$
$\lg G$	$\lg G$	$\lg G$	$\lg 10$	$\lg(n_2 \ n_3)$
$\lg g_1$	$\lg g_2$	$\lg g_3$	$\lg F$	$\lg \sin u_3$
a_1	a_2	a_3	$\lg w$	$\lg s_2$
b_1	b_2	b_3	$11 \lg y_4$	$\lg \lg u_2$
c_1	c_2	c_3	$\lg 12$	$\text{clg tg } u_3$
e_1	e_2	e_3	$\lg G$	$\lg s_2$
f_1	f_2	f_3	$\lg z$	s'_2
g_1	g_2	g_3	ρ	$-s'_0$
x_1	x_2	x_3	q	$\delta s'$
			θ	
$\lg s_1$	$\lg x_1$	$\lg x_2$	w	$\lg \sin u_2$
$\lg \text{tg } u_1$	$\lg \text{tg } u_1$	$\lg \text{tg } u_1$	z	$\text{clg } \sin u_3$
$\lg y_1$	$\lg \Delta y_1$	$\lg \Delta y_2$	$\text{tg } \Phi_1$	$\lg \beta'$
	y_1	y_1	u_1	β'
	$-\Delta y_1$	Δy_2	$-\Phi_1$	$-\beta$
	y_2	y_3	i_1	$\delta\beta$
		y_4		

Положения главных плоскостей могут быть найдены как разности вершинных и фокусных расстояний:

$$-s'_H - f' - s'_F = 1,78 \text{ мм}; s_H = -f + s_F = 1,54 \text{ мм}.$$

§ 21. ТИПЫ ЛИНЗ

Линза есть оптическая деталь, ограниченная двумя преломляющими поверхностями, являющимися поверхностями тел вращения. Все линзы можно разделить на три группы.

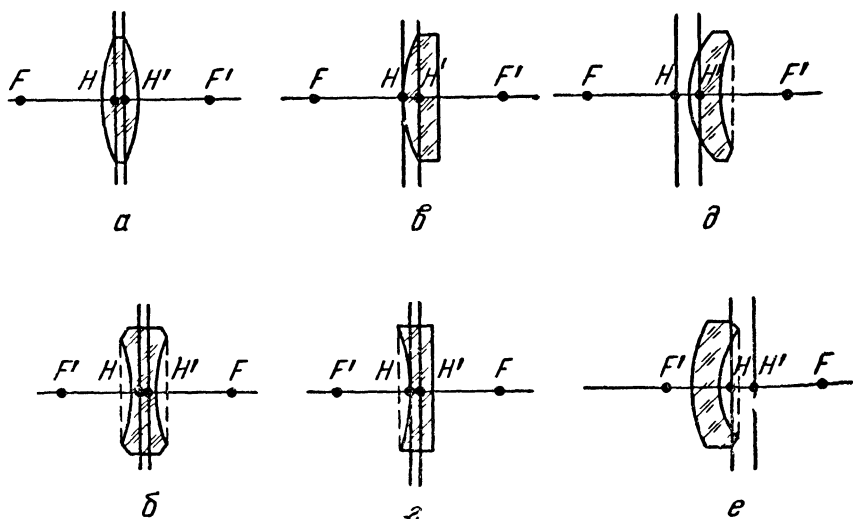


Рис. 19. Типы линз

1. Линзы, имеющие различные знаки радиусов кривизны поверхностей (би-форма). К таким линзам относятся *двояковыпуклые* и *двояковогнутые* линзы (рис. 19, а, б).

2. Линзы, имеющие одну из поверхностей плоской (план-форма). Такие линзы называются *плоско-выпуклыми* или *плоско-вогнутыми* (рис. 19, в, г).

3. Линзы, имеющие одинаковые знаки радиусов кривизны поверхностей. Такие линзы называют *менисками* (выпукло-вогнутыми или вогнуто-выпуклыми) (рис. 19, д, е).

На рис. 19 показаны положения главных точек и точек главных фокусов. У всех линз передняя главная плоскость находится перед задней.

Фокусные расстояния линз и положения главных плоскостей можно вычислить по формулам (20,1—20,5). С конструктивной стороны каждая линза характеризуется радиусами кривизны поверхностей r_1 и r_2 , толщиной d и показателем преломления n . Положительные линзы обычно толще в середине, а отрицательные —

на краю. Поэтому малая толщина линз по краю характерна для положительных линз.

Если толщина линзы слишком мала, то сферические поверхности образуют острый край. Такая линза называется линзой с острым краем. Ее диаметр можно найти по формуле

$$D_{\text{ок}} = 2 \sqrt{2r_1 h_1 - h_1^2}, \quad (21,1)$$

где h_1 — стрелка прогиба поверхности;

$$h_1 = \frac{d^2 + 2r_2 d}{2(d - r_1 + r_2)}. \quad (21,2)$$

Рассмотрим некоторые виды линз.

Линза с равными радиусами разных знаков. В формулу (20,1) подставим $r_1 = -r_2 = r$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{2(n-1)}{r} - \frac{(n-1)^2 d}{nr^2}$$

и окончательно

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{nr^2} (2nr - nd + d). \quad (21,3)$$

Такая линза может быть двояковыпуклой или двояковогнутой.

Линза с одной плоской поверхностью. Подставив в формулу (20,1) $r_2 = \infty$, получим

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{r}. \quad (21,4)$$

В этом случае знак радиуса определяет знак фокусного расстояния. Формула (21,4) называется формулой плоско-выпуклой (или плоско-вогнутой) линзы.

Линза-шар. В шаровой линзе $r_1 = -r_2 = r$, и толщина линзы $d = 2r$. Подставив эти значения в формулу (20,1), получим

$$\frac{1}{f'} = \frac{2(n-1)}{nr}. \quad (21,5)$$

Линза с равными радиусами одинаковых знаков. Такая линза относится к группе менисков. Подставив в формулу (20,1) $r_1 = r_2 = r$, получим

$$\frac{1}{f'} = \frac{(n-1)^2 d}{nr^2}. \quad (21,6)$$

Концентрическая линза. Концентрической линзой называется такая линза, у которой центры кривизны поверхностей находятся в одной точке. Такая линза обладает свойством пропускать лучи света без преломления, если они направляются в центр кривизны. Она относится к группе менисков. Ее фокусное

расстояние всегда отрицательно. Формулу (20,1) преобразуем, подставив вместо d равную ей величину $r_1 - r_2$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{(n-1)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} + \frac{(n-1)^2 (r_1 - r_2)}{n r_1 r_2},$$

или

$$\frac{1}{f'} = \frac{(n-1)(r_2 - r_1)}{n r_1 r_2}$$

и, наконец,

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (21,7)$$

Телескопическая линза. Телескопической линзой называется линза, фокусное расстояние которой равно бесконечности. Отсюда следует, что луч, направляющийся в линзу параллельно оптической оси, по выходе из линзы также идет параллельно оптической оси. Чтобы выполнить это условие, в формуле линзы (20,1) следует положить

$$(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = - \frac{(n-1)^2 d}{n r_1 r_2}.$$

В этом случае получим

$$r_2 = r_1 - \frac{(n-1)d}{n}. \quad (21,8)$$

Если необходимо найти толщину линзы, удовлетворяющую условию фокусного расстояния, равного бесконечности, то при данных радиусах кривизны будем иметь

$$d = \frac{(r_1 - r_2)n}{n-1}. \quad (21,9)$$

Линза относится к группе менисков.

Гиперболическая линза. Гиперболической линзой называется линза, у которой одна или обе поверхности являются гиперболическими. Наиболее часто применяется положительная плоско-выпуклая линза, позволяющая получить гомоцентрический пучок лучей для бесконечно удаленной точки на оси оптической системы.

Уравнение поверхности определяется выражением

$$y^2 = x^2(n^2 - 1) - 2x(n-1)f'. \quad (21,10)$$

Такая линза своей плоской поверхностью обращена к предмету (x — отрицателен).

Сферо-эллиптическая линза. Эллиптической линзой называется линза, у которой имеющаяся одна или обе поверхности являются эллиптическими. Такая линза также позволяет получить гомоцентрический пучок лучей в пространстве изображе-

ний, аналогично гиперболической линзе, но она обращена своей выпуклой эллиптической поверхностью к предмету. Вторая поверхность делается концентрической по отношению к точке заднего фокуса.

Если толщина линзы d , а заднее вершинное фокусное расстояние s'_F , то уравнение поверхности имеет следующий вид:

$$y^2 = 2(s'_F + d)x \frac{n-1}{n} - x^2 \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right) \quad (21,11)$$

и

$$r_2 = s'_F. \quad (21,12)$$

Линза относится к группе менисков.

Пример 10. Определить диаметр линзы до острого края, если радиус кривизны первой поверхности $r_1=40$ мм, второй — $r_2=-60$ мм, а толщина $d=6$ мм.

Решение. Применим формулы (21,2) и (21,1), тогда

$$h_1 = 3,64 \text{ мм}, D_{\text{ок}} = 33,34 \text{ мм}.$$

Пример 11. Найти фокусное расстояние концентрической линзы с радиусами кривизны 35 и 30 мм из стекла с показателем преломления $n=1,52$.

Решение. Применив формулу (21,7), получим

$$f' = \frac{nr_1r_2}{(n-1)(r_2-r_1)} = -613,84 \text{ мм}.$$
