



БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»
ВЫПУСК 21

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ
В. А. ЕФРЕМОВИЧ

НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Под редакцией
С. П. НОВИКОВА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
1982

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **И. К. Кикоин** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), доктор физ.-мат. наук **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, академик **В. М. Глушков**, академик **П. Л. Капица**, профессор **С. П. Капица**, академик **С. П. Новиков**, академик **Ю. А. Осипьян**, академик АПН РСФСР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, кандидат хим. наук **М. Л. Смоленский**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**, член-корреспондент АН СССР **И. С. Шкловский**

Болтянский В. Г., Ефремович В. А.

Б 79 Наглядная топология. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 160 с. (Библиотечка «Квант», Вып. 21). — 25 коп.

Топология — сравнительно молодая математическая наука. Примерно за сто лет ее существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики. Поэтому проникновение в «мир топологии» для начинающего несколько затруднительно, так как требует знания многих фактов геометрии, алгебры, анализа и других разделов математики, а также умения рассуждать.

Книга написана просто и наглядно. В форме, доступной для понимания школьников, она знакомит читателя с идеями топологии, ее основными понятиями и фактами. Большое количество рисунков облегчает усвоение материала. Этому же способствуют свыше двухсот задач.

Для школьников, преподавателей, студентов.

Простейшие идеи топологии возникают из непосредственного наблюдения за окружающим миром. Интуитивно ясно, что высказывания о геометрических свойствах фигур не вполне исчерпываются сведениями об их «метрических» свойствах (размерах, углах и т. д.). Остается еще «кое-что» за пределами старой геометрии. Какой бы длинной ни была линия (веревка, провод, длинная молекула), она может быть замкнутой или нет; если линия замкнута, то она может сложным образом «заузляться». Две (или более) замкнутые линии могут «зацепляться» одна с другой и притом различными способами. Тела, их поверхности, могут иметь «дырки». Эти свойства тел характеризуются тем, что они не меняются при деформациях, допускающих любые растяжения без разрывов. Такие свойства и называются топологическими. Кроме элементарных геометрических фигур, топологическими свойствами обладают многие чисто математические объекты, и именно это определяет их важность.

Однако легче подметить существование топологических свойств фигур, чем создать их «исчисление», т. е. раздел математики, обладающий точными понятиями, строгими законами и методами, математическими формулами, изображающими топологические величины.

Первые важные наблюдения и точные топологические соотношения были найдены еще Эйлером, Гауссом и Риманом. Тем не менее, без преувеличения можно сказать, что топология как раздел науки основана в конце XIX века А. Пуанкаре. Процесс построения топологии и решения ее внутренних задач оказался трудным и длительным: он продолжался не менее 70—80 лет, наполненных глубокими открытиями и, в ряде случаев, даже пересмотром основ. В нем принял участие ряд наиболее выдающихся математиков своего времени, включая советских *). На

*) Советская топологическая школа возникла в Москве, в 20-х годах нашего века. Ее создатели — П. С. Урысон и П. С. Александров.

протяжении многих лет, приблизительно до конца 50-х годов, топология рассматривалась даже математиками других областей как красивая, но бесполезная игрушка. Автор этих строк должен откровенно признаться, что еще в студенческие времена, в 50-х годах, выбрал себе эту область для будущей деятельности, увлеченный ее красотой и необычностью по сравнению с более традиционными разделами математики, и при этом значительное время (до конца 60-х годов) испытывал неудовлетворенность итогами развития этой области именно из-за недостатка приложений. Следует заметить, что ряд красивых топологических закономерностей в других разделах математики был уже к тому времени обнаружен — в теории функций и комплексном анализе, в качественной теории динамических систем и уравнений с частными производными, в теории операторов и даже в алгебре.

Однако лишь с начала 70-х годов началось интенсивное проникновение методов топологии в аппарат современной физики. Сейчас важность топологических методов для различных разделов физики уже не вызывает сомнений — для теории поля и общей теории относительности, физики анизотропных сплошных сред и низких температур, современной квантовой теории и т. д. Это приводит к необходимости появления достаточно элементарных популярных книг по топологии и ее приложениям, доступных (хотя бы частично) для школьников старших классов и студентов младших курсов с естественнонаучными и техническими интересами.

Эта книга написана известными топологами и геометрами В. Г. Болтянским и В. А. Ефремовичем, которые много лет посвятили работе, направленной на популяризацию идей топологии. К книге добавлено Приложение, посвященное изложению одного интересного применения топологии в теории нематических жидких кристаллов. Автор Приложения, В. П. Минеев, внес значительный вклад во внедрение методов топологии в теоретическую физику.

Мы надеемся, что книга будет весьма полезна широкому кругу читателей.

С. П. Новиков

Топология — сравнительно молодой и очень важный раздел математики. Известный французский математик Андре Вейль сказал, что за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры, выразив этим, во-первых, необычайное изящество и красоту топологии и, во-вторых, то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. А за последнее время топология все более проникает в физику, химию, биологию — один пример применения идей топологии в физике читатель найдет в Приложении, написанном В. П. Минеевым. Однако проникновение в волшебный мир топологии затруднительно. Подобно тому, как строительные леса, окружающие недостроенное здание, мешают охватить взглядом красоту архитектурного замысла, так многочисленные и утомительные детали построения, заполняющие книги по топологии, затрудняют охватить мысленным взором красивое здание этой математической науки. Даже специалисты-математики нередко отступают перед трудностями на пути овладения топологией (особенно алгебраической топологией, первоначальным идеям которой посвящена третья часть этой книги).

Все это делает очень важным написание популярных книг по топологии. Первая книга такого рода была выпущена в нашей стране еще в середине 30-х годов*). Впоследствии, начиная с 1957 г., во 2-м, 3-м, 4-м и 6-м выпусках «Математического просвещения» была опубликована по частям наша книга «Очерк основных идей топологии» (в Польше, Японии и Венгрии книга была выпущена отдельным изданием). Однако обе книги давно уже стали библиографической редкостью. В предлагаемую вниманию читателя книгу включена часть материала из «Очерка», в связи с чем В. А. Ефремович является одним из

*) Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. — М., 1936.

авторов книги (и, кстати, основным инициатором написания «Очерка» и проведения популяризаторской работы в области топологии). Однако бóльшую часть текста я написал заново (с учетом некоторых научных результатов, полученных за последние годы). Кроме того, я включил в книгу свыше двухсот задач — ведь чтение научной книги (даже популярной) лишь тогда приносит пользу, когда самостоятельно размышляешь над излагаемыми вопросами.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. П. Новикова за ценные замечания, а также всех читателей, которые захотят высказать мнение об этой книге и замечания к ней.

В. Г. Болтянский

* * *

Это издание подготовил к печати В. Г. Болтянский, значительно переработав и дополнив материал нашего «Очерка». За все это искренне его благодарю; выражаю также признательность С. П. Новикову за ценные замечания и поддержку.

В. А. Ефремович