21. Фундаментальная группа

Классы гомотопных путей и произведение этих классов можно рассмотреть для любой фигуры X. Будем рассматривать только такие пути в X, которые начинаются и кончаются в фиксированной точке $x_0 \in X$. Любые два из таких путей можно перемножить. Будем рассматривать *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Если a — некоторый класс и h — какой-либо путь, принадлежащий этому классу, то будем говорить, что h — *представитель* класса a и писать $a = [h]$. Множество всех классов обозначим через $\pi(X)$. *Умножение* классов определим так же, как и в предыдущем пункте (см. рис. 133): если a и b — два класса путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0), а h и k — какие-либо их представители, т. е. $a = [h]$, $b = [k]$, то класс, представителем которого является путь hk, мы объявляем *произведением* классов a и b, т. е. $ab = [hk]$. Заметим, что если вместо h и k взять другие представители h' и k' рассматриваемых классов a и b, то мы получим путь $h'k'$, гомотопный пути hk, т. е. определяющий тот же самый класс: $[h'k'] = [hk]$. Таким образом, произведение двух классов определяется именно этими классами, а от выбора представителей не зависит. Оказывается, что *относительно введенной операции умножения множество* $\pi(X)$ *является группой* *).

*) С понятием группы читатель может познакомиться по вышедшей в серии «Библиотечка «Квант» книге: Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980.

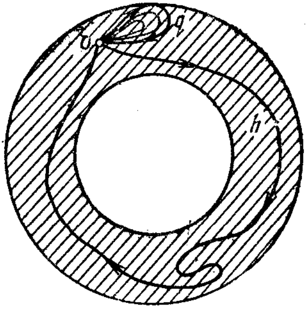


Рис. 134.

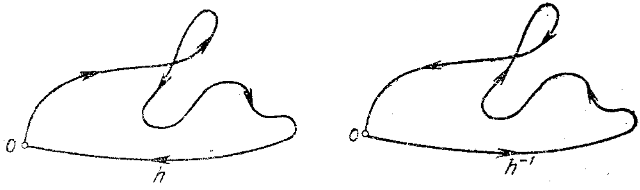


Рис. 135.

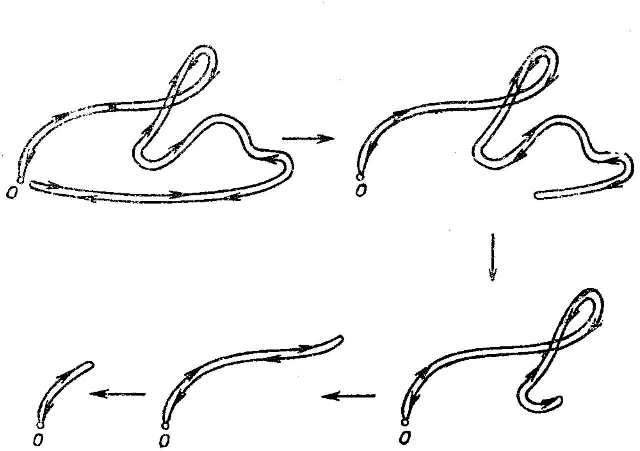


Рис. 136.

Укажем вкратце, как это устанавливается. Если h — какой-либо путь, принадлежащий классу a, а q — путь, который может быть стянут в точку, то $qh \sim h$ (рис. 134) и $hq \sim h$. Поэтому, обозначая символом 1 класс всех путей, стягиваемых в точку, мы получаем $1a = a$, $a1 = a$ для любого класса $a \in \pi(X)$, т. е. класс 1 является *единицей* относительно умножения, введенного в $\pi(X)$.

Далее, если a — какой-либо класс и h — его представитель, то обозначим через h^{-1} путь h, пробегаемый в обратном направлении (рис. 135). Тогда каждый из путей hh^{-1} и $h^{-1}h$ может быть стянут в точку (на рис. 136 показано стягивание в точку пути hh^{-1}). Поэтому, обозначив через a^{-1} класс, которому принадлежит путь h^{-1}, мы найдем, что $aa^{-1} = 1$, $a^{-1}a = 1$, т. е. в $\pi(X)$ для каждого элемента a существует *обратный*.

Несложно доказывается, что умножение в $\pi(X)$ *ассоциативно*. Таким образом, множество $\pi(X)$ есть группа. Она называется *фундаментальной группой* фигуры X (построенной в точке x_0).

Можно показать (см. задачу 148), что если любые две точки могут быть соединены путем в фигуре X, то фундаментальные группы фигуры X, построенные в разных точках x_0 и x_0', изоморфны. В этом случае (который мы только и будем рассматривать) можно просто говорить о фундаментальной группе фигуры X, не указывая, в какой точке она построена. *Фундаментальная группа является топологическим инвариантом*, т. е. если фигуры X и Y гомеоморфны, то их фундаментальные группы $\pi(X)$ и $\pi(Y)$ изоморфны. Заслуга открытия и изучения этого топологического инварианта принадлежит Пуанкаре.

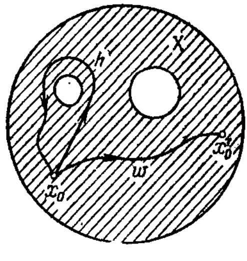


Рис. 137.

Задачи

146. Если группа $\pi(X)$ тривиальна (т. е. состоит только из единичного элемента), то фигура X называется *односвязной*. Иначе говоря, фигура X односвязна, если любой замкнутый путь в X может быть стянут в точку. Докажите, что любая выпуклая фигура (в частности, прямая, плоскость, отрезок, круг, шар, выпуклый многоугольник или многогранник) односвязны.

147. Докажите, что сфера односвязна.

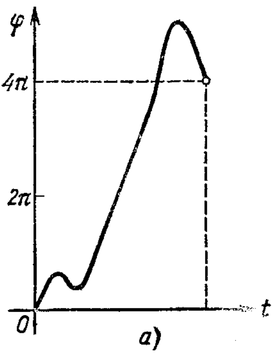
Указание: любой путь (даже заполняющий всю сферу, подобно кривой Пеано) может быть деформирован в «гладкий путь», не покрывающий всю сферу.

148. Пусть w — путь, соединяющий две точки x_0, x_0' фигуры X. Каждому замкнутому пути h с начальной точкой x_0 поставим в соответствие путь $h^* = w^{-1}hw$ с начальной точкой x_0' (рис. 137). Докажите, что этим определяется изоморфизм фундаментальной группы фигуры X, построенной в точке x_0, и группы, построенной в точке x_0'.

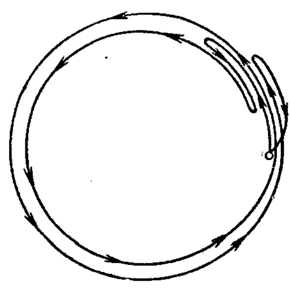
Пример 42. Покажем, что *фундаментальная группа окружности является свободной циклической, т. е. изоморфна аддитивной группе целых чисел.*

В самом деле, обозначим путь, равномерно обходящий окружность B в некотором «положительном» направлении, через a, а обратный путь — через a^{-1}. Тогда a^n будет обозначать путь, $|n|$ раз обходящий окружность: в «положительном» направлении, если $n > 0$, и в «отрицательном», если $n < 0$ (путь a^0 оставляет точку покоящейся в начальной точке x_0).

Любому пути можно поставить в соответствие некоторый график: положение точки, пробегающей путь, задается значением параметра t (например, времени) на единичном отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. С другой стороны, этому же положению точки соответствует ее угловая координата φ на



а)



б)

Рис. 138.

окружности B (отсчитываемая от начальной точки x_0). Откладывая по оси абсцисс t, а по оси ординат угол φ, получим график зависимости $\varphi(t)$ (причем $\varphi(0) = 0$).

Если точка, движущаяся равномерно, обходит окружность n раз, мы получаем путь a^n; его график — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(0; 0)$ и $(1; 2n\pi)$. Однако точка может двигаться по окружности B, многократно изменяя направление движения. На рис. 138, a

показан график пути, схематически изображенного на рис. 138, *б*. Но каким бы ни был замкнутый путь на окружности, его график всегда соединяет точку $(0;\ 0)$ с точкой $(1;\ 2n\pi)$, где n — некоторое целое число: ведь, пройдя этот путь, мы возвращаемся в точку x_0, угловая координата которой является числом, кратным 2π. Число n называется *числом обходов* по окружности.

Любой путь f, совершающий n обходов, гомотопен пути a^n: начертив на одном рисунке графики путей f и a^n, заставим каждую точку первого графика перемещаться параллельно оси ординат до графика пути a^n. Если такое перемещение производить одновременно для всех точек (рис. 139), то мы продеформируем график пути f в отрезок, являющийся графиком пути a^n. Но если график деформируется, то и сам путь деформируется, откуда и следует, что пути f и a^n гомотопны.

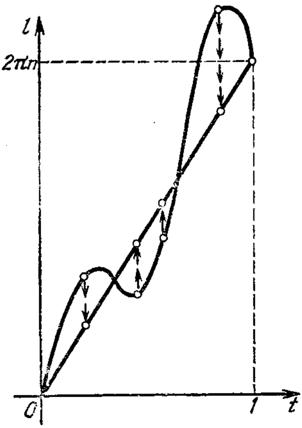


Рис. 139.

Значит, все пути, совершающие n обходов по окружности, гомотопны пути a^n, т. е. принадлежат одному классу путей. Пути же, для которых число обходов различно, не гомотопны между собой.

Итак, *элементы фундаментальной группы окружности B находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами*. Так как при перемножении путей их числа обходов, очевидно, складываются, то из этого следует, что *группа $\pi(B)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел*.

Задачи

149. Докажите, что фундаментальная группа кругового кольца является свободной циклической группой.

150. Фигура X представляет собой плоскость, из которой выколота (удалена) одна точка. Докажите, что группа $\pi(X)$ — свободная циклическая.

151. Докажите, что внутренняя область простой замкнутой линии l односвязна. Если же область G имеет границу, состоящую более чем из одного замкнутого контура (см. рис. 132 на с. 99), то G неодносвязна.