22. Клеточные разбиения и полиэдры

Мы часто рассматривали поверхность Q, на которой начерчен граф G, разбивающий ее на части, гомеоморфные кругу. Это пример *клеточного разбиения*. Поверхность Q представляется в виде объединения попарно не пересекающихся *клеток: нульмерных, одномерных* и *двумерных*. Нульмерными клетками являются точки — вершины графа G. Одномерные клетки — ребра графа G (без концов). Каждая одномерная клетка гомеоморфна открытому отрезку (без концов). Двумерные клетки — куски поверхности, на которые она распадается, если ее разрезать по ребрам графа G. Каждая двумерная клетка гомеоморфна открытому кругу.

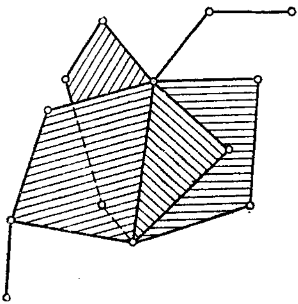


Рис. 140.

Можно также рассматривать клеточные разбиения, в которых к некоторому ребру (одномерной клетке) примыкают три, четыре или большее число двумерных клеток, а не обязательно две или одна, как было в случае поверхности с краем. К некоторым ребрам может не примыкать ни одной двумерной клетки (рис. 140). Если клеточное разбиение состоит только из нульмерных и одномерных клеток, то оно представляет собой граф. В топологии рассматривают клеточные разбиения любого числа измерений. Например, трехмерное клеточное разбиение состоит из клеток размерностей 0,1,2,3 (причем если удалить все клетки размерностей 0,1,2, то оно распадается на трехмерные клетки, каждая из которых гомеоморфна открытому шару).

Фигура, которую можно представить в виде клеточного разбиения, называется *полиэдром*. Фигуры, рассмотренные в примерах 16 (с. 33), 18 (с. 36), 31 (с. 84), полиэдрами не являются.

Пример 43. Сферу P_0 можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из одной нульмерной и одной двумерной клетки. Действительно, если в сфере «выколоть» точку, то оставшаяся часть т будет гомеоморфна открытому кругу. Одномерных клеток это клеточное разбиение не содержит.

Пример 44. На рис. 141 изображено клеточное разбиение, состоящее из круга и его границы, разбитой на две полуокружности r_1, r_2. Склеивание диаметрально противоположных точек окружности превращает круг в проективную плоскость, причем оба ребра, r_1, r_2, склеиваются в одно ребро r. Мы получаем клеточное разбиение проективной плоскости, содержащее одну вершину, одно ребро r и одну двумерную клетку τ.

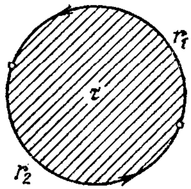


Рис. 141.

Пример 45. Начертим на торе параллель a и меридиан b, пересекающиеся в точке o (см. рис. 57, *г* на с. 48). Мы получаем клеточное разбиение тора, состоящее из одной вершины o, двух ребер a, b и одной двумерной клетки τ. Действительно, разрез по меридиану и параллели превращает тор в квадрат (см. задачу 65 на с. 48), т. е. в кусок, гомеоморфный кругу.

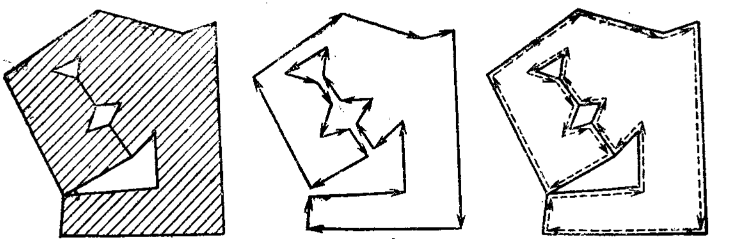
Задачи

152. Докажите, что ручку можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, три ребра и одну двумерную клетку (см. рис. 58 на с. 48).

153. Докажите (см. рис. 59 на с. 48), что сферу с k ручками можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, $2k$ ребер и одну двумерную клетку.

Нам понадобится говорить о *направлении обхода* на контуре грани (двумерной клетки). Смысл слов «направление обхода» в случае, когда грань гомеоморфна кругу, очевиден. В более сложных случаях направление обхода определяется следующим образом. При разрезании по всем ребрам грань (рис. 142, *а*) превращается в кусок, гомеоморфный кругу (рис. 142, *б*). Обойдем один раз границу этого куска в некотором направлении. При обратном «склеивании» рассмотренного куска в грань этот обход и даст *обход по контуру грани*. Можно поступить и иначе: совершить обход «очень близко» к границе клетки, нигде ее не пересекая (рис. 142, *в*).

Рассмотрим некоторую грань клеточного разбиения; все ребра, к которым она примыкает, как-либо ориентируем (т. е. выберем на них направления) и обозначим буквами a, b, c, . . . Совершим теперь обход по контуру грани и одновременно с этим будем выписывать некоторый одночлен. Если мы, начиная обход, движемся сначала по ребру a, то мы напишем a или a^{-1}, смотря по тому, проходим мы (совершая обход) ребро a по направлению имеющейся на этом ребре стрелки или против нее. Если следующее ребро, которое мы проходим, обозначено, скажем, буквой d, то мы справа припишем d или d^{-1}, смотря по тому, в каком направлении мы пробегаем ребро d. Если вслед за тем мы проходим ребро m, то припишем справа m или



а) *б)* *в)*

Рис. 142.

m^{-1} и т. д. Совершив весь обход, мы выпишем некоторый одночлен, который называется *гомотопической границей* рассматриваемой грани.

Гомотопическую границу можно записать по-разному, в зависимости от того, в каком направлении обходить контур грани и с какого ребра начинать обход. Мы будем для каждой грани брать одну запись гомотопической границы (безразлично, какую именно).

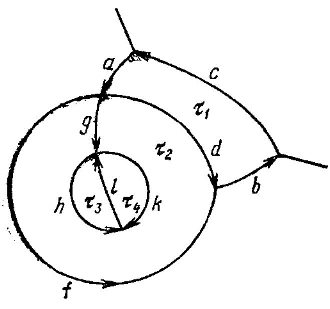


Рис. 143.

Например, обходя против часовой стрелки контуры клеток $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ на рис. 143, мы получим их гомотопические границы:

$$adbc;\quad kh^{-1}g^{-1}fd^{-1}g;\quad hl;\quad l^{-1}k^{-1}.$$

Заметим, что ребро g встречается в гомотопической границе грани τ_2 дважды.

Мы дадим теперь (без доказательства) способ вычисления фундаментальной группы связного полиэдра X. Возьмем какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через G граф, образованный вершинами и ребрами. В графе G выберем максимальное дерево и все ребра, входящие в это дерево, пометим цифрой **1**. Остальные ребра графа G (перемычки) как-либо ориентируем и пометим различными буквами a, b, c, . . . Далее, для каждой грани рассматриваемого клеточного разбиения выпишем ее гомотопическую границу, не обращая внимания на ребра, помеченные цифрой 1. Наконец, построим группу, приняв буквы a, b, c, . . ., надписанные на перемычках, за ее образующие элементы, а за определяющие соотношения между этими образующими — равенства, получающиеся, если все выписанные гомотопические границы приравнять единице. *Эта группа изоморфна фундаментальной группе полиэдра X.*

Пример 46. Возьмем клеточное разбиение проективной плоскости, рассмотренное в примере 44. Максимальное дерево состоит из одной вершины. Поэтому ребро r является единственным образующим элементом фундаментальной группы. Далее, гомотопическая граница двумерной клетки τ (см. рис. 141) равна $r \cdot r$. Итак, фундаментальная группа проективной плоскости определяется одной образующей r с соотношением $r^2 = 1$, т. е. является группой второго порядка.

Пример 47. Рассмотрим клеточное разбиение тора, описанное в примере 45. Гомотопическая граница двумерной клетки τ равна $aba^{-1}b^{-1}$ (надо обойти контур на рис. 57, a (см. с. 48) против часовой стрелки). Таким образом, фундаментальная группа тора имеет две образующие a, b, связанные единственным соотношением $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. $ab = ba$. Иначе говоря, она является свободной абелевой группой с двумя образующими.

Задачи

154. Используя клеточное разбиение, рассмотренное в задаче 152, докажите, что фундаментальная группа *ручки* представляет собой группу с тремя образующими a, b, c и единственным соотношением $ba = cab$. Эта группа некоммутативна: например, $ba \neq ab$.

155. Используя результат задачи 153, докажите, что группа $\pi(P_k)$ имеет $2k$ образующих $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ с единственным соотношением $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1} = 1$. При $k \geqslant 2$ эта группа неабелева (например, $a_1b_1 \neq b_1a_1$).

156. Докажите, что группа $\pi(N_q)$ имеет q образующих $c_1, c_2, \ldots, c_q$, связанных единственным соотношением $c_1^2c_2^2 \cdot \ldots \cdot c_q^2 = 1$.

157. Докажите, что две замкнутые поверхности (без края) в том и только в том случае гомеоморфны, если их фундаментальные группы изоморфны.

158. Букетом окружностей B_k^1 называется объединение k простых замкнутых линий, которые все имеют общую точку o и больше общих точек попарно не имеют (рис. 144). Докажите, что $\pi(B_k^1)$ есть свободная группа с k образующими.

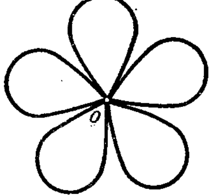


Рис. 144.

159. Область X на плоскости ограничена одним внешним контуром и k внутренними (см. рис. 132 на с. 99). Докажите, что $\pi(X)$ есть свободная группа с k образующими.