Отображение $f\colon A \to B$ называется *взаимно однозначным*, если в каждую точку множества B отображается точно одна точка множества A. Это означает, что, во-первых, никакие две различные точки множества A не переходят в одну и ту же точку множества B (не «склеиваются» при отображении f) и, во-вторых, каждая точка множества B поставлена в соответствие некоторой точке множества A (т. е. A отображается на всё множество B, а не на его часть). Для взаимно однозначного отображения $f\colon A \to B$ можно определить *обратное отображение* $f^{-1}\colon B \to A$ (которое каждой точке $y \in B$ ставит в соответствие точку множества A, переходящую в y при отображении f).

Отображение $f\colon A \to B$ называется *гомеоморфным отображением* (или *гомеоморфизмом*), если оно, во-первых, взаимно однозначно и, во-вторых, взаимно непрерывно, т. е. не только само отображение f непрерывно, но и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Наглядно гомеоморфизм можно представлять себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеиваний. Например, будем считать, что фигуры A, B «изготовлены» из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать любые растяжения и искривления этого материала без разрывов и без образования складок и склеек; если мы сможем при этих условиях «наложить» фигуру A на B, то они гомеоморфны. Так, контур треугольника (или, вообще, любого многоугольника) гомеоморфен окружности.

Пример 4. Поверхность шара, поверхность куба, цилиндра — все гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны *тору* (который можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной камеры, рис. 5). Поверхность гири (рис. 6) гомеоморфна тору.

Пример 5. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Пример 6. Пусть A — полуокружность с центром o, из которой исключены концевые точки m, n, а B — касатель-

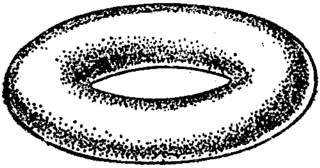

Рис. 5.

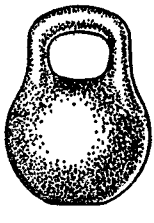

Рис. 6.

ная к полуокружности, параллельная диаметру mn (рис. 7). Центральное проектирование $p: A \to B$ из центра o является гомеоморфизмом. Таким образом, прямая гомеоморфна полуокружности без концевых точек.

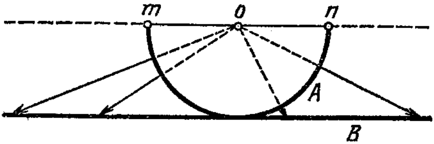

Рис. 7.

В свою очередь полуокружность гомеоморфна отрезку (ее можно распрямить). Следовательно, *прямая гомеоморфна открытому отрезку* (т. е. отрезку, из которого выброшены концевые точки).

Задачи

8. Докажите, что фигура, являющаяся объединением боковой поверхности цилиндра и его нижнего основания («стакан»), гомеоморфна кругу.

9. Докажите, что плоскость гомеоморфна открытому кругу (т. е. кругу, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), а также сфере, из которой «выколота» (удалена) одна точка.

10. Докажите, что фигуры, изображенные на рис. 8 (лента, гомеоморфная боковой поверхности цилиндра, и дважды перекрученная лента) гомеоморфны между собой *).

Поучительно сравнить понятие г о м е о м о р ф и з м а и понятие к о н г р у э н т н о с т и фигур. В геометрии рассматриваются отображения, сохраняющие расстояния между точками. Они называются *движениями* (или перемещениями). В результате движения каждая фигура перекладывается на новое место как твердое целое, без изменения расстояний. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью движения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые, как не отличающиеся (с геометрической точки зрения) друг от друга. В топологии рассматриваются отображения, более общие, чем движения, а именно г о м е о м о р ф н ы е о т о б р а ж е н и я. Две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга. *Те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных отображениях, называются т о п о л о г и ч е с к и м и свойствами фигур, или т о п о л о г и ч е с к и м и и н в а р и а н т а м и* (от латинского слова invariant — неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается *топология*.

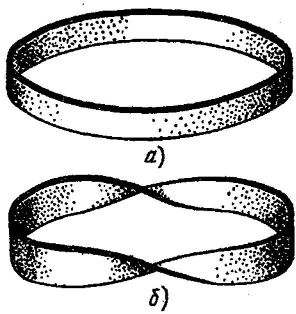

Рис. 8.

Задачи

11. Если фигура A состоит лишь из конечного числа точек, то через $n(A)$ обозначим число ее точек; если же фигура A содержит бесконечно много точек, то условимся писать $n(A) = \infty$. Является ли $n(A)$ топологическим инвариантом?

12. Фигура A называется *вложимой в плоскость*, если она гомеоморфна некоторой фигуре, лежащей в плоскости. Например, «стакан» (задача 8) вложи́м в плоскость. Является ли свойство фигуры быть вложимой в плоскость топологическим инвариантом?

*) На рис. 8 (и следующих) поверхности изображены «толстыми», т. е. как бы изготовленными из некоторого материала. Читатель должен иметь в виду, что это сделано только для наглядности, и должен представлять себе «математические» поверхности, не имеющие толщины.

Не следует думать, что любые две гомеоморфные между собой фигуры можно перевести одну в другую, изгибая, растягивая и перемещая их (без разрывов и склеиваний) в пространстве. Например, фигуры, изображенные на рис. 8, нельзя перевести одну в другую таким способом, они «неодинаково расположены» в пространстве. Верхнюю ленту нужно разрезать и затем, дважды перекрутив, снова склеить по тем же самым точкам; лишь после этого ее удастся совместить со второй лентой. Этот прием (разрезание фигуры, а затем, после надлежащего растяжения, перемещения ее частей — обратное склеивание) часто используется в топологии для доказательства гомеоморфности двух фигур.

«Одинаковость расположения» двух фигур в пространстве (или в объемлющей их фигуре) уточняется понятием *изотопии*. Говорят, что две гомеоморфные фигуры A и B *изотопны* в объемлющей их фигуре P (или, иначе, *топологически одинаково расположены* в P), если существует гомеоморфное отображение фигуры P на себя, при котором фигура A переходит в B. Ленты на рис. 8 гомеоморфны, но не изотопны друг другу в пространстве (доказательство этого будет дано ниже). О свойствах расположения можно говорить, если задана *пара фигур*: фигура A и объемлющая ее фигура P. Изучением свойств расположения (т. е. изучением топологических инвариантов пары фигур) также занимается топология.

Задачи

13. Линия A (рис. 9) не разрезает тор T на две части, а линия C разрезает. Изотопны ли A и C в фигуре T? Изотопны ли A и C в трехмерном пространстве?

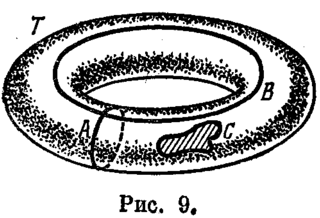

Рис. 9.

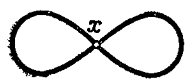

Рис. 10.

14. Докажите, что меридиан A и параллель B тора T (см. рис. 9) изотопны в T.

15. Докажите, что в фигуре восьмерки (рис. 10) любые две точки, отличные от x, изотопны.