23. Накрытия

Пример 48. На окружности B с центром o фиксируем начальную точку x_0 и для любой точки $x \in B$ обозначим через $\varphi(x)$ величину центрального угла x_0ox. Функция $\varphi(x)$ определена с точностью до числа, кратного 2π. График E этой многозначной функции может быть построен на боковой поверхности бесконечного ц и л и н д р а; он имеет вид *винтовой линии* с шагом 2π (рис. 145).

Обозначим через p проектирование линии E на окружность B вдоль образующих цилиндра. Для произвольной точки $x \in B$ возьмем небольшую ее окрестность U. Часть линии E, проектирующаяся на U, состоит из отдельных кусков $\ldots, V_{-1}, V_0, V_1, \ldots$ (рис. 146). Каждый из них с помощью проекции p гомеоморфно отображается на всю окрестность U.

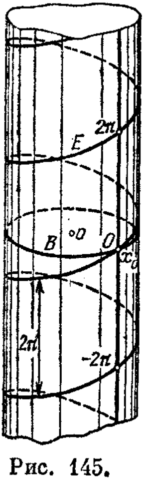

Рис. 145.

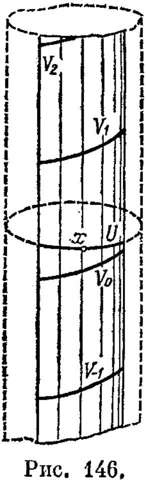

Рис. 146.

Указанное свойство подводит нас к понятию *накрытия*. Пусть p — непрерывное отображение фигуры E на B. Допустим, что p обладает таким же свойством, как и в примере 48: для каждой точки $x \in B$ можно подобрать такую ее окрестность U, что полный прообраз $p^{-1}(U)$ (т. е. множество всех точек фигуры E, переходящих при отображении p в точки окрестности U) распадается на части, каждая из которых при помощи p гомеоморфно отображается на U. При этих условиях E называется *накрытием* (или *накрывающей фигурой*) для B. Части полного прообраза $p^{-1}(U)$, гомеоморфно отображающиеся на U, называются *листами* накрытия. По числу листов различают двулистные, трехлистные и т. д. накрытия. Накрытие окружности винтовой линией бесконечнолистно.

Пример 49. Всякая односторонняя поверхность N имеет в качестве двулистной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P. Расположим поверхность N в пространстве (с самопересечениями) без точек излома и отложим на каждой нормали (в ту и другую сторону от точки $x \in N$) отрезки $x\bar{x}$ и $x\bar{x}'$ постоянной длины ε, где ε — малое положительное число. Если бы поверхность N была двусторонней, то точки $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ описали бы две различные поверхности, «параллельные» N. Но так как поверхность N односторонняя, то мы получим одну поверхность P: ведь при обходе по некоторому замкнутому пути на односторонней поверхности нормаль $x\bar{x}$ меняет направление, т. е. переходит в $x\bar{x}'$, так что точки $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ принадлежат одному куску поверхности P. Наглядно это построение можно описать так: вообразим поверхность N изготовленной из «толстого» материала и окрасим ее всю краской. Если теперь «сжечь» поверхность N, считая, что краска негорючая, то оставшийся тонкий слой краски и образует поверхность P, двулистно накрывающую N. При этом поверхность P двусторонняя: одна ее сторона обращена к сожженной поверхности N, а другая — наружу.

Например, если ленту Мёбиуса, изготовленную из «толстого» горючего материала, окрасить негорючей краской, а затем ленту Мёбиуса сжечь, то мы получим ленту, гомеоморфную боковой поверхности цилиндра (четырежды перекрученную, как легко убедиться на модели), которая двулистно накрывает ленту Мёбиуса.

Задачи

160. Докажите, что если E является k-листным накрытием полиэдра B, то $\chi(E) = k\chi(B)$.

161. Докажите, что двулистная накрывающая поверхности N_q является сферой с $q-1$ ручками.

Пусть фигура E является накрывающей для B и $p: E \to B$ — соответствующая проекция. Пусть, далее, h — путь в фигуре B, исходящий из точки x_0, а $\bar{x}_0 \in E$ — некоторая точка, расположенная «над» x_0, т. е. удовлетворяющая условию $p(\bar{x}_0) = x_0$. Тогда в E существует (причем единственный) путь $\bar{h}$, начинающийся в точке $\bar{x}_0$ и переходящий в путь h при отображении p; он называется *накрывающим путем.* В самом деле, пусть U — маленькая окрестность точки x_0 и $\bar{U}$ — тот лист накрытия, который содержит точку $\bar{x}_0$. Тогда, поскольку $p: \bar{U} \to U$ — гомеоморфизм, мы однозначно сможем «поднять» кусочек пути h, находящийся в окрестности U, на лист $\bar{U}$ (рис. 147). Если x_1 — концевая точка того участка пути, который мы уже «подняли», то можно рассмотреть окрестность U_1 точки x_1 и соответствующий лист накрытия, что позволит

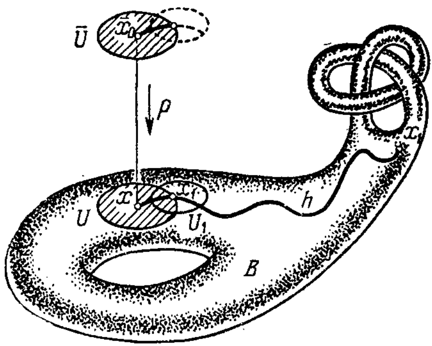

Рис. 147.

продолжить накрывающий путь $\bar{h}$ еще на один кусочек, и т. д.

Рассмотрение накрывающих путей позволяет установить теорему о связи между накрытиями и фундаментальной группой. Мы ее приведем (без доказательства) в следующей упрощенной формулировке. *Если связный полиэдр E является k-листным накрывающим над B и порядок группы $\pi(E)$ (т. е. число ее элементов) равен n, то порядок группы $\pi(B)$ равен kn.*

Накрытие E над B называется *универсальным*, если оно **о д н о с в я з н о**. В силу сказанного выше число листов универсального накрытия над B равно порядку группы $\pi(B)$; любое другое накрытие имеет меньшее число листов.

Накрытие проективной плоскости сферой (см. задачу 161) универсально в силу односвязности сферы. Сфера является также универсальной накрывающей для самой себя. Оказывается, что *для всех замкнутых поверхностей, кроме сферы и проективной плоскости, универсальной накрывающей является плоскость*. Доказательством этого факта мы и закончим этот пункт. Прежде всего, так как односторонняя поверхность N имеет своей двулистной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P, то универсальное накрытие над P будет универсальным накрытием и над N. Поэтому достаточно рассмотреть двусторонние поверхности, отличные от сферы.

Разделим плоскость двумя системами параллельных прямых на конгруэнтные квадраты; склеивая каждый квадрат в тор, мы получим отображение всей плоскости на тор, причем точкам, одинаково расположенным в различных квадратах (рис. 148), соответствует одна и та же точка тора

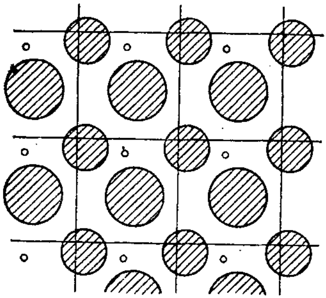

Рис. 148.

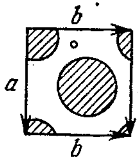

Рис. 149.

(рис. 149). Получающееся накрытие универсально, так как плоскость односвязна.

Каждый из квадратов является так называемой *фундаментальной областью*, т. е. связным куском накрывающей (плоскости), который взаимно однозначно отображается на тор. Рис. 150 показывает, что фундаментальная область определена не однозначно.

Опишем теперь разбиение на фундаментальные области, из которых склеиваются другие двусторонние поверхности, например, P_2. Такое разбиение удобно произвести с помощью геометрии Лобачевского. В этой геометрии сумма углов многоугольника меньше, чем в евклидовой геометрии, причем сумма углов уменьшается при увеличении размеров многоугольника. Например, существует правильный восьмиугольник с углами $\frac{\pi}{4}$. Если такие восьмиугольники прикладывать друг к другу целыми сторонами, то ими можно заполнить всю плоскость Лобачевского, причем в вершинах будут сходиться по восемь многоугольников. На рис. 151 изображено такое разбиение для модели плоскости Лобачевского в «круге Пуанкаре». Это и есть разбиение плоскости Лобачевского (она гомеоморфна открытому кругу, а потому и плоскости Евклида) на фундаментальные области:

склеивание сторон каждого восьмиугольника дает P_2 (см. рис. 59 на с. 48) и получается накрывающее отображе-

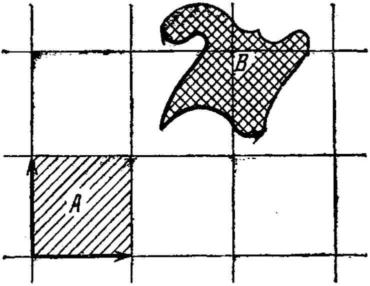

Рис. 150.

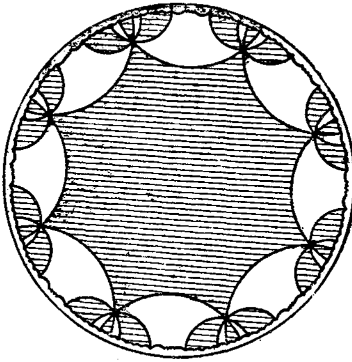

Рис. 151.

ние плоскости Лобачевского на P_2. Аналогичное разбиение плоскости Лобачевского можно построить и для любой поверхности P_k ($k \geqslant 2$).

Задачи

162. На рис. 152 изображена «плоскость с бесконечным числом ручек». Покажите, что при $k \geqslant 2$ она может служить накрытием над поверхностью P_k.

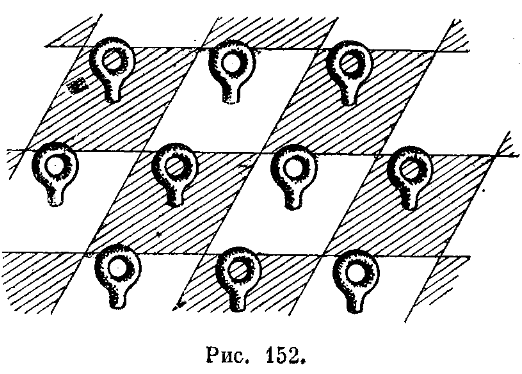

Рис. 152.

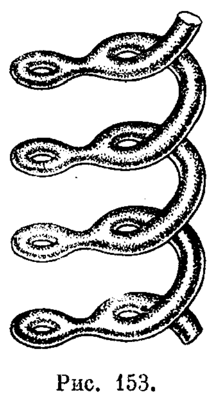

Рис. 153.

163. Покажите, что поверхность, изображенная на рис. 153, может служить накрывающей для любой поверхности P_k ($k \geqslant 2$).

164. Постройте универсальную накрывающую для фигуры, состоящей из сферы и касающейся ее окружности.