24. Степень отображения и основная теорема алгебры

На рис. 154 изображено непрерывное отображение f окружности P на окружность Q. На окрестность точки y отображаются два куска окружности P, причем отображаются **положительно** (т. е. с сохранением направления обхода). Говорят, что в точке y это отображение имеет степень 2. В точке x отображение также имеет степень 2: хотя на окрестность точки x отображаются **четыре** куска окружности P, но три из них отображаются положительно, а один — отрицательно. Если мы обозначим через p число листов, положительно отображающихся на окрестность некоторой точки $z \in Q$, а через n — число листов, отображающихся отрицательно, то степенью отображения f в точке z будет число $p - n$. Во всех точках окружности Q степень отображения f одинакова (и равна двум); например, в точке x имеем $p - n = 3 - 1 = 2$.

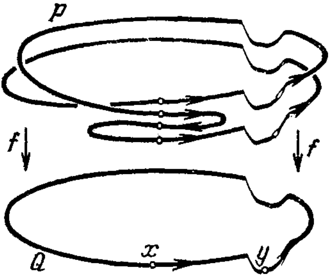

Рис. 154.

О степени отображения можно говорить и в случае отображения поверхностей. Пусть P и Q — две замкнутые ориентируемые поверхности, на каждой из которых задана ориентация. Пусть, далее, $f\colon P \to Q$ — некоторое непрерывное отображение; будем представлять себе, что поверхность P «наложена» на поверхность Q, располагаясь на ней несколькими «слоями» и образуя складки. Если на окрестность точки $z \in Q$ отображается несколько «листов» поверхности P, то некоторые из этих листов могут отображаться **положительно** (с сохранением ориентации, рис. 155, *а*), а некоторые — **отрицательно** (рис. 155, *б*). Если все «листы» поверхности P отображаются на окрестность точки z гомеоморфно, причем число листов, на которых отображение f положительно, равно p, а число листов, на которых оно отрицательно, равно n, то число $p - n$ называется *степенью* отображения f в точке z.

Нетрудно понять, что степень отображения f **одинакова** вблизи любой точки поверхности Q. Действительно, при перемещении точки z числа p и n меняются лишь при прохождении через край складки, но разность $p - n$ остается неизменной (рис. 156). Заметим еще, что когда отображение f непрерывно деформируется, степень его остается неизменной; это можно пояснить, заметив, что образование (или расправление) складок не меняет степени отображения.

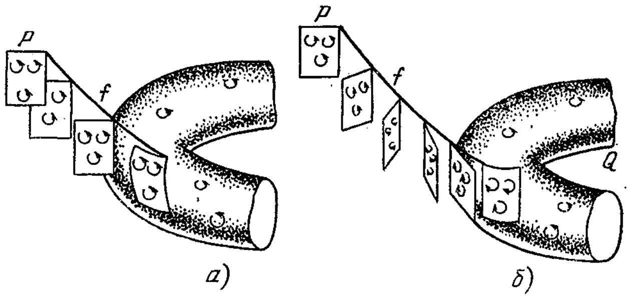

Рис. 155.

С помощью понятия степени отображения можно дать изящное доказательство **основной теоремы алгебры**: *любой многочлен*

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m,$$

степени $m \geqslant 1$ с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$ имеет хотя бы один корень.

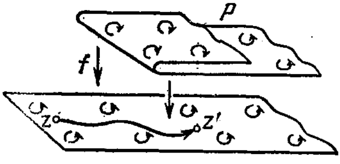

Рис. 156.

Возьмем сферу S, касающуюся плоскости в начале координат, и будем называть точку касания *южным полюсом*, а противоположную точку n — *северным полюсом* сферы (рис. 157). Будем изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой в плоскости, считая x и y его координатами (рис. 158). Отрезок nz пересекает сферу S в некоторой точке, которую мы будем считать *изображением* комплексного числа z на сфере S. Обратно, имея на сфере точку a, легко узнать, какое комплексное число она изображает: прямая na при пересечении с плоскостью и даст искомое комплексное число. Однако северный полюс n не изображает никакого комплексного числа. Мы условимся считать, что точка n изображает «бесконечное» комплексное число, обозначаемое символом ∞. Поводом для такого соглашения служит то, что при неограниченном удалении точки z на плоскости (в любую сторону) от начала координат изображающая ее точка на сфере приближается к n. Сфера S называется *комплексной сферой*, или *сферой Римана*. Отметим, что (в отличие от проективной плоскости; см. рис. 83 на с. 63) сфера S получилась

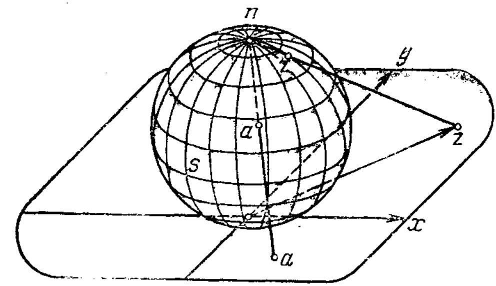

Рис. 157.

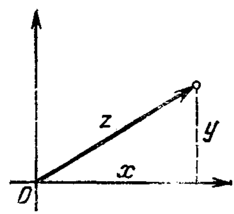

Рис. 158.

из плоскости добавлением одной бесконечно удаленной точки ∞.

Мы будем изображать значения z на одной комплексной сфере S_1, а значения многочлена $f(z)$ — на другой такой же сфере S_2. Каждой «конечной» точке $z = x + iy$ сферы S_1 соответствует «конечная» точка $f(z)$ сферы S_2. При этом если z будет приближаться к ∞, то $f(z)$ также будет приближаться к точке ∞ сферы S_2. Действительно, мы имеем

$$f(z) = z^m \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z^{m-1}} + \frac{a_m}{z^m}\right);$$

при $z \to \infty$ (т. е. при неограниченном увеличении числа $|z|$) выражение в скобках приближается к единице, а множитель z^m неограниченно увеличивается. Таким образом, дополнив определение многочлена условием $f(\infty) = \infty$, мы получаем непрерывное отображение f всей сферы S_1 на сферу S_2.

Для доказательства основной теоремы алгебры нужно установить, что найдется точка $z \in S_1$, для которой $f(z) = 0$, т. е. что точка 0 сферы S_2 является образом хотя бы одной точки $z \in S_1$. Если бы это было не так, т. е. точка 0 сферы S_2 не покрывалась образом $f(S_1)$ сферы S_1, то степень отображения $f\colon S_1 \to S_2$ вблизи точки $0 \in S_2$ была бы равна нулю, а так как степень одинакова вблизи любой точки, то просто степень отображения f была бы равна нулю. Поэтому для доказательства основной теоремы алгебры достаточно установить, что степень отображения f отлична от нуля. Мы покажем, что она равна m, т. е. совпадает со степенью многочлена $f(z)$ (это и послужило причиной введения термина «*степень отображения*»).

Будем изменять значения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_m$, приближая их к нулю; многочлен $f(z)$ будет меняться, отображение $f: S_1 \to S_2$ будет непрерывно деформироваться. В результате мы получим многочлен $f_1(z) = z^m$. Но так как при деформации отображения его степень не меняется, то отображения f и f_1 имеют одинаковую степень. Степень же отображения f_1 легко подсчитать.

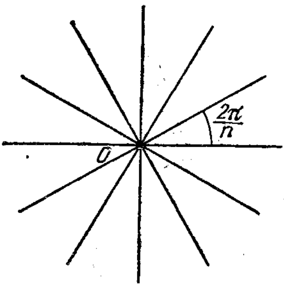

Рис. 159.

Разобьем плоскость лучами, исходящими из точки 0, на m конгруэнтных углов (рис. 159). Так как при возведении комплексного числа z в степень m его аргумент увеличивается в m раз, то каждый из этих углов с помощью f_1 отображается («растягивается») на всю сферу S_2. Таким образом, при отображении f_1 образ сферы S_1 покрывает m раз (причем положительно) сферу S_2. Отсюда и вытекает, что степень отображения f_1 (а значит, и f) равна m. Теорема доказана.

В настоящее время известно много различных доказательств основной теоремы алгебры, но все они являются топологическими, т. е. в той или иной форме используют идею непрерывности. Без привлечения идей топологии доказывать основную теорему алгебры невозможно; можно сказать (хотя это звучит несколько странно), что основная теорема алгебры является *неалгебраической теоремой.*

Задачи

165. Докажите, что если $q \geqslant mk$, то существует отображение $f: P_q \to P_k$, имеющее степень m.

166. Докажите, что если P и Q — ориентируемые поверхности и отображение $f: P \to Q$ является k-листным накрытием, то степень отображения f равна $\pm k$.

167. Докажите, что если $f(z)$ — многочлен степени $m > 1$, то при некотором c (комплексном или действительном) уравнение $f(z) = c$ имеет не более $m - 1$ различных корней.

Указание. Если число корней равно m для любого c, то $f\colon S_1 \to S_2$ является накрытием и, следовательно, гомеоморфизмом.

168. Докажите, что при $k \geqslant 1$ всякое отображение $f\colon P_0 \to P_k$ стягиваемо (и потому имеет степень нуль).

Указание. Докажите, что для f существует накрывающее отображение $\bar{f}\colon P_0 \to \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ — универсальное накрытие над P_k.