25. Группа узла

Пусть L_1 и L_2 — два узла в трехмерном пространстве. Обозначим через D_1 дополнительное пространство узла L_1 (т. е. множество всех точек пространства, не лежащих на линии L_1), а через D_2 — дополнительное пространство узла L_2. Если узлы L_1, L_2 «одинаковы»

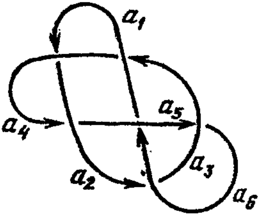

Рис. 160.

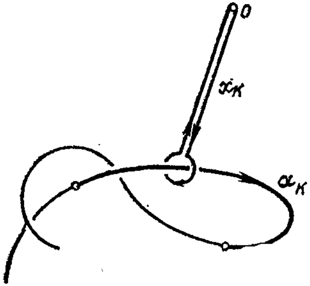

Рис. 161.

(изотопны), т. е. существует гомеоморфное отображение f пространства на себя, при котором L_1 переходит в L_2, то $f(D_1) = D_2$, т. е. дополнительные пространства гомеоморфны. Следовательно, группы $\pi(D_1)$ и $\pi(D_2)$ изоморфны, т. е. *фундаментальная группа дополнительного пространства является инвариантом узла*. Этот инвариант называется группой узла. Мы будем группу узла обозначать буквой G, т. е. $G(L_1) = \pi(D_1)$. Из сказанного ясно, что если группы $G(L)$ и $G(L')$ не изоморфны, то узлы L и L' не изотопны.

Укажем теперь (без доказательства) способ вычисления группы узла. Пусть нормальная проекция узла L разбита на n дуг $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отделенных перерывами. Кроме того, выберем на L направление обхода и отметим его стрелками на дугах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (рис. 160). Теперь для описания группы $G(L)$ возьмем в пространстве точку o, расположенную в ы ш е линии L, и из нее проведем замкнутый путь x_k, охватывающий дугу α_k, расположенную над a_k, и обходящий ее в соответствии с правилом буравчика (рис. 161). Гомотопические классы путей x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) являются **образующими** группы узла.

Рассмотрим теперь какую-нибудь двойную точку проекции и обойдем вокруг нее по небольшой окружности l (по часовой стрелке), выписывая одновременно некоторый одночлен. Именно, если встретившаяся (при движении по l) дуга a_i **входит** внутрь окружности, то возьмем соответствующий символ x в степени $+1$, а если выходит из окружности, то в степени -1. Обойдя вокруг двойной точки, мы выпишем, слева направо, произведение четырех множителей, которое приравняем единице; например, для двойной точки на рис. 162 получим соотношение

$$x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k = 1.$$

Нетрудно наглядно представить себе, что путь $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k$ действительно гомотопен нулю в дополнительном пространстве: на рис. 163 изображена пленка, гомеоморфная

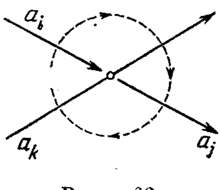

Рис. 162.

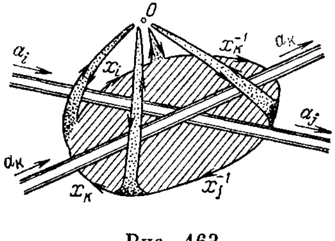

Рис. 163.

кругу, натянутая на этот путь. Оказывается, что, написав такие соотношения для всех двойных точек, мы и получаем полную систему соотношений между образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это описание группы узла применимо и к произвольным переплетениям.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных узлов и переплетений, рассмотрим один алгебраический пример.

Пример 50. Докажем, что группа G, заданная тремя образующими x_1, x_2, x_3 и соотношениями

$$x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} = 1, \quad x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, \quad x_1 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} = 1,$$

неабелева. Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений равностороннего треугольника; она состоит из шести элементов: поворотов вокруг точки o на углы 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и трех осевых симметрий x'_1, x'_2, x'_3, оси которых показаны на рис. 164. Без труда проверяется, что для элементов x'_1, x'_2, x'_3 указанные соотношения справедливы. При этом группа G' неабелева. Следовательно, группа G, заданная образующими x_1, x_2, x_3 и выписанными соотношениями, также неабелева (действительно, из

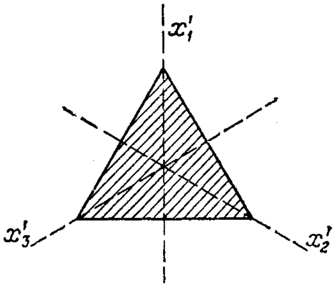

Рис. 164.

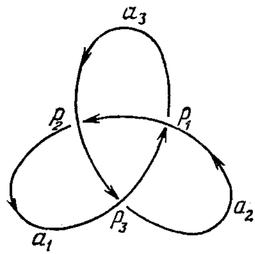

Рис. 165.

этих соотношений **не может** вытекать, что группа G абелева, так как тогда и группа G' должна была бы быть абелевой, что неверно).

Пример 51. На рис. 165 изображена проекция простого узла L. Соотношения между образующими x_1, x_2, x_3 (взятые в двойных точках p_1, p_2, p_3) совпадают с соотношениями, которые указаны в примере 50. Таким образом, группа $G(L)$ этого узла неабелева. Следовательно, узел L **не изотопен** окружности (у которой фундаментальная группа дополнительного пространства является свободной циклической и потому абелева). Таким образом, узел L не может быть развязан без разрезания нити.

Пример 52. На рис. 166 изображено переплетение L, образованное средними линиями торов, которые составляют множество A_1 на рис. 104, *а* (с. 84). Группа $G(L)$ этого переплетения имеет $2m$ образующих $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, которые получаются, если рассматривать пути, охватывающие дуги $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$, изображенные на рис. 166. Между этими образующими имеется $2m$ соотношений (выписанных для двойных точек p_i, q_i), которые имеют следующий вид:

$$x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} y_{i+1} = 1, \quad x_i y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+1} = 1; \quad i = 1, \ldots, m$$

(где следует считать $x_{m+1} = x_1$, $y_{m+1} = y_1$). Окружность l, изображенная на рис. 166, представляет собой путь в дополнительном пространстве переплетения L, причем класс этого пути равен $x_1^{-1} y_1$ (рис. 167). Докажем, что путь

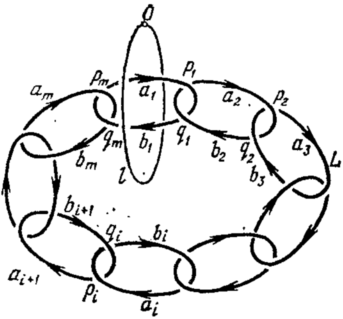

Рис. 166.

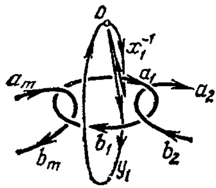

Рис. 167.

l негомотопен нулю в дополнительном пространстве, т. е. при стягивании окружности l в точку она непременно пересечет переплетение L.

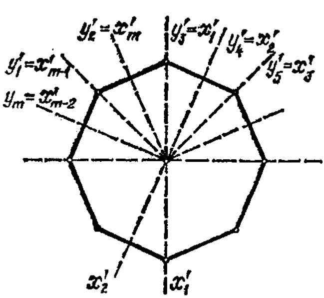

Рис. 168.

Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений правильного m-угольника. Она состоит из поворотов вокруг точки o на углы $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$ и осевых симметрий $x_1', \ldots, x_m'$, оси которых показаны на рис. 168. Положим, кроме того,

$$y_1' = x_{m-1}', \quad y_2' = x_m', \quad y_3' = x_1', \ \ldots, \ y_m' = x_{m-2}'.$$

Без труда проверяется, что эти элементы группы G' удовлетворяют всем выписанным соотношениям (поскольку $(x_i')^{-1} = x_i'$, а $x_i' x_{i+1}'$ есть поворот на угол $\frac{2\pi}{m}$). Кроме того, элемент $(x_1')^{-1} y_1'$ (представляющий собой поворот на угол $\frac{4\pi}{m}$) отличен от единицы группы G' (т. е. от тождественного отображения). Следовательно, и в группе G элемент $(x_i)^{-1} y_1$ отличен от единицы. Иначе говоря, окружность l определяет в дополнительном пространстве путь, негомотопный нулю.

Аналогично можно доказать, что путь l негомотопен нулю и в дополнении переплетения, представляющего собой объединение средних линий торов, составляющих множество A_2 (рис. 104, *б*), и т. д. Это и дает обоснование свойств антуановского множества, рассмотренного в п. 17.

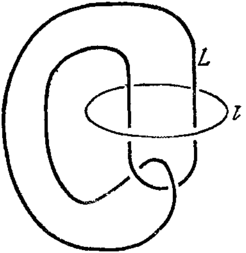

Рис. 169.

Задачи

169. Докажите, что переплетение, изображенное на рис. 117 (с. 91), невозможно «разнять», не разрывая ни одной из линий.

Указание. Докажите, что окружность l_1 определяет ненулевой элемент группы $G(L)$, где L — переплетение, образованное двумя другими окружностями. Для этого проверьте, что $G(L)$ есть свободная группа с двумя образующими.

170. Докажите, что окружность l, изображенную на рис. 169, невозможно «снять» с линии L и, следовательно, в дополнительном пространстве линии L не существует пленки, гомеоморфной кругу, которая «натянута» на l. Докажите также, что существует пленка, гомеоморфная ручке, которая «натянута» на l и расположена в дополнительном пространстве линии L.