

## 26. Циклы и гомологии

На каждом из рисунков 170, 171 одномерный цикл  $z$  (он изображен в виде плавной линии, а не ломаной) ограничивает на поверхности некоторую область  $x$ . На рисунках эта область («пленка», натянутая на цикл  $z$ ) ориентирована согласованно с этим циклом. Будем считать каждый *ограничивающий цикл* (т. е. цикл, на который можно натянуть пленку) несущественным, или, как говорят, *гомологичным нулю*.

На рис. 172, *a* изображены два цикла  $z_1$  и  $z_2$ ; объединение этих циклов обозначим через  $z_1 + z_2$ . На рис. 172, *б* показана разность  $z_1 - z_2$  этих циклов (т. е. сумма цикла  $z_1$  и цикла  $-z_2$ , получающегося из  $z_2$  изменением ориентации). На рисунке видно, что цикл  $z_1 - z_2$  гомологичен нулю (он является границей пленки  $x$ ). В этом случае говорят, что циклы  $z_1$  и  $z_2$  *гомологичны*.

В работах Пуанкаре были введены и изучены *группы гомологий*, являющиеся важными топологическими инва-

риантами. Идея их построения состоит в том, чтобы изучить, как велик в данной фигуре  $X$  запас циклов, которые попарно не гомологичны.

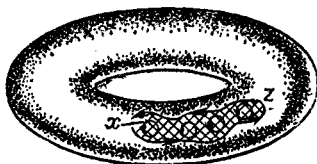


Рис. 170.

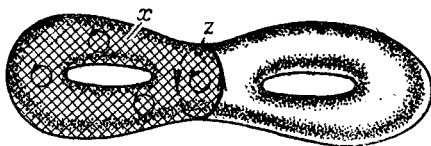


Рис. 171.

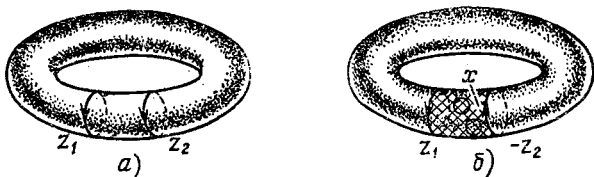


Рис. 172.

### Задачи

171. Докажите, что на сфере каждый одномерный цикл гомологичен нулю.

172. Докажите, что в дополнительном пространстве множества  $A_1$ , рассмотренного в примере 31 (а значит, и в дополнительном пространстве антуановского множества  $A^* \subset A_1$ ) цикл  $l_1$  (см. рис. 105, а на с. 85) гомологичен нулю. Отсюда можно заключить, что *стягиваемость* цикла является более тонким свойством, чем его гомологичность нулю.

173. Докажите, что каждый из циклов, изображенных замкнутыми контурами на рис. 173, 174, гомологичен нулю вне остальных контуров.

174. Докажите, что если коэффициент зацепления  $w(z_1, z_2)$  отличен от нуля, то ни один из циклов  $z_1, z_2$  не гомологичен нулю в дополнительном пространстве другого цикла.

Для построения групп гомологий следует обобщить понимание циклов и натягиваемых на них пленок. На рис. 175 каждый из циклов  $z_1, z_2$  гомологичен нулю: цикл

$z_1$  является границей круга  $\tau_1 + \tau_2$ , а цикл  $z_2$  — границей круга  $\tau_1 + \tau_3$ . Сумма же  $z_1 + z_2$  ограничивает «область»  $(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_1 + \tau_3) = 2\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ , состоящую из «дважды взятой» клетки  $\tau_1$  и «один раз взятых» клеток  $\tau_2$  и  $\tau_3$ . Таким образом, чтобы убедиться, что цикл  $z_1 + z_2$

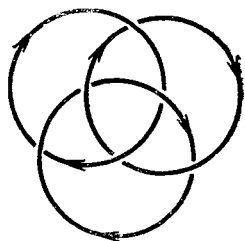


Рис. 173.

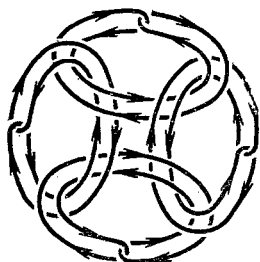


Рис. 174.

гомологичен нулю, приходится брать клетки с определенными коэффициентами. Точно так же циклы могут состоять из клеток, взятых с некоторыми коэффициентами. Например, на рис. 176 сумма  $r_1 + r_2 + r_3 + 3r_4$  является циклом, поскольку (учитывая «трижды взятое» ребро  $r_4$ )

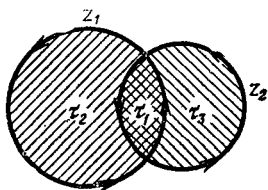


Рис. 175.

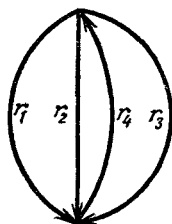


Рис. 176.

в каждой вершине число входящих и исходящих ребер одинаково.

Отметим следующую теорему, вытекающую из закона двойственности Александра — Понтрягина (полную формулировку этого закона мы здесь не приводим). Пусть  $P$  — полиэдр, расположенный в трехмерном евклидовом пространстве, а  $Q$  — его дополнительное пространство; цикл  $z_1$ , расположенный в одной из фигур  $P, Q$ , в том и только в том случае не гомологичен нулю в этой фигуре, если в другой из этих фигур найдется цикл  $z_2$ , зацепленный с  $z_1$  (т. е.  $\omega(z_1, z_2) \neq 0$ ).

**Пример 53.** На рис. 177 изображена линия  $P$  и цикл  $z'$  в дополнительном пространстве  $Q$ , причем цикл  $z'$  не зацеплен с одномерными циклами полиэдра  $P$ . Следовательно,  $z'$  гомологичен нулю в  $Q$ . На рисунке показана двумерная пленка  $x' \subset Q$ , границей которой является цикл  $z'$ .

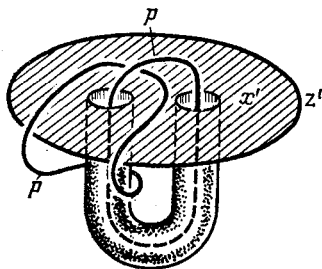


Рис. 177.

### Задачи

175. Для циклов  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , расположенных на поверхности кренделя (рис. 178), укажите в дополнительном пространстве такие циклы  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , что  $w(m_i, z_j)$  равно единице при  $i = j$  и нулю при  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ).

176. Докажите, что для любого узла  $l \subset R^3$  существует такой полиэдр  $K \subset R^3$ , гомеоморфный боковой поверхности цилиндра, что один край его совпадает с  $l$ , а другой край  $l'$  имеет с  $l$  нулевой коэффициент зацепления.



Рис. 178.

177. Постройте в фигуре  $P$  (см. рис. 132 на с. 99) циклы  $m_1, m_2, m_3$ , а в ее дополнении (в пространстве) циклы  $z_1, z_2, z_3$  так, что  $w(m_i, z_j)$  равно единице при  $i = j$  и нулю при  $i \neq j$ .

Будем рассматривать не сами одномерные циклы, а *классы гомологий*, объединяя в один класс все гомологичные между собой одномерные циклы рассматриваемой фигуры  $X$ . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть *одномерная группа гомологий*  $H_1(X)$ .

Опишем способ в ы ч и с л е н и я одномерной группы гомологий. Прежде всего отметим, что *если два цикла  $z_1, z_2$  гомотопны* (т. е. могут быть получены один из другого с помощью деформации), то они гомологичны. Наглядно это можно объяснить тем, что «след», который «замечает» цикл  $z_1$  в процессе его деформации в  $z_2$ , и есть та пленка, которая соединяет циклы  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 179).

Обратное может не иметь места; гомологичные циклы на рис. 180 не гомотопны: перемещению цикла  $z_1$  на поверхности  $Q$  в цикл  $z_2$  мешают «дырки», имеющиеся на поверхности между этими циклами. Таким образом, для гомоло-

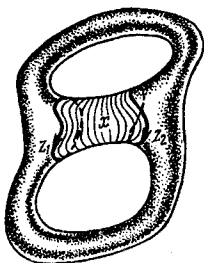


Рис. 179.

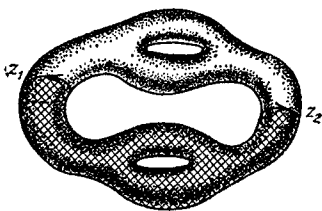


Рис. 180.

гичности двух циклов достаточно (но не необходимо), чтобы они были гомотопными.

Легко представить себе наглядно, что если задано клеточное разбиение полиэдра  $X$ , то любой одномерный цикл в этом полиэдре может быть при помощи деформации «сдвинут» в *одномерный остов*, т. е. в граф, состоящий из всех вершин и ребер (рис. 181). «Складки», которые могут возникнуть при деформации, можно распрямить. Следовательно, любой одномерный цикл гомотопен (а значит, и гомологичен) циклу, составленному из ребер, взятых с некоторыми коэффициентами. Таким образом, для вычисления группы гомологий  $H_1(X)$  достаточно рассматривать одномерные циклы, составленные из ребер (с некоторыми целочисленными коэффициентами). Пленки же, натягиваемые на циклы, можно считать составленными из *двумерных* клеток, взятых с некоторыми коэффициентами.

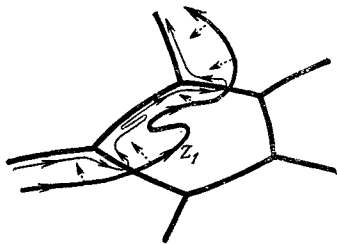


Рис. 181.

Значит, нужно, во-первых, найти все одномерные циклы (составленные из ребер) и, во-вторых, научиться вычислять границы двумерных клеток, чтобы выяснить, какие одномерные циклы друг другу гомологичны. Первое не представляет труда: надо лишь проследить,

чтобы в каждой вершине число входящих ребер было равно числу исходящих (учитывая коэффициенты). Второе фактически мы уже умеем делать: надо совершить обход по контуру клетки (в соответствии с ее ориентацией), но выписывать не произведение ребер (что мы делали при составлении гомотопической границы клетки), а их сумму с учетом знаков. Иначе говоря, в границу двумерной клетки  $\tau$  (ее обозначают через  $\partial\tau$ ) ребро  $r$  войдет с коэффициентом, равным сумме показателей степени, с которыми  $r$  входит в гомотопическую границу. Например, для клеток на рис. 143 (с. 108), ориентированных против часовой стрелки, мы имеем

$$\begin{aligned}\partial\tau_1 &= a + b + c + d; & \partial\tau_2 &= -d + f - h + k; \\ \partial\tau_3 &= h + l; & \partial\tau_4 &= -k - l.\end{aligned}$$

**Пример 54.** Клеточное разбиение двумерной сферы  $P_0$ , рассмотренное в примере 43, содержит только две клетки: нульмерную и двумерную. Одномерных клеток это разбиение не содержит совсем, поэтому группа  $H_1(P_0)$  тривиальна (ненулевых одномерных циклов в этом клеточном разбиении нет).

**Пример 55.** Рассмотренное в примере 44 клеточное разбиение проективной плоскости  $N_1$  состоит из одной нульмерной клетки, одной одномерной клетки  $r$  и одной двумерной клетки  $\tau$ . Любой одномерный цикл имеет вид  $kr$  (поскольку, кроме  $r$ , других ребер нет), причем цикл  $2r$  гомологичен нулю (так как  $2r = \partial r$ ; см. рис. 141 на с. 107). Отсюда следует, что одномерная группа гомологий  $H_1(N_1)$  проективной плоскости является группой порядка 2.

Заметим, что при вычислении групп гомологий в примерах 54, 55 мы использовали одно клеточное разбиение рассматриваемого полиэдра, но говорили не о «группе гомологий этого разбиения», а о группе гомологий самого полиэдра. В действительности, это оправдано, поскольку группы гомологий полиэдров не зависят от выбора клеточных разбиений, а всецело определяются самими полиэдрами.

### Задачи

178. На рис. 182 показано клеточное разбиение ленты Мёбиуса (обе полуокружности на внутреннем контуре склеиваются в одно ребро  $a$ ). Проверьте, что  $\partial\tau = c - 2a$ , и выведите отсюда, что одномерная группа гомологий ленты Мёбиуса является свободной циклической.

179. Докажите, что для клеточного разбиения тора  $T$ , рассмотренного в примере 45 (с. 107), справедливо соотношение  $\partial\tau = 0$ . Выведите отсюда, что  $H_1(T)$  есть свободная абелева группа с двумя образующими  $a, b$ .

180. Докажите, что цикл  $z$ , изображенный на рис. 183, гомологичен  $\pm 3a \pm 2b$  (где знаки зависят от направлений, выбранных на параллели  $a$  и меридиане  $b$  тора  $T$ ).

181. Докажите, что одномерная группа гомологий кренделя  $P_2$  является свободной абелевой группой с четырьмя образующими  $m_1, m_2, m_3, m_4$  (см. рис. 178).

182. Докажите, что одномерная группа гомологий поверхности  $P_k$  является свободной абелевой группой с  $2k$  образующими.

183. Вычислите группу  $H_1(N_q)$ . (О т в е т: абелева группа с  $q$  образующими  $c_1, c_2, \dots, c_q$ , связанные

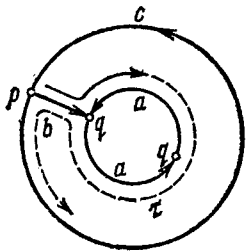


Рис. 182.

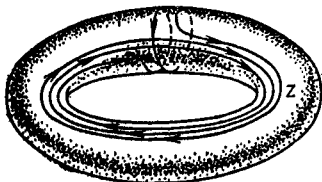


Рис. 183.

ми единственным соотношением  $2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_q = 0$ . Эту группу можно описать и иначе: прямая сумма группы второго порядка и свободной абелевой группы с  $q - 1$  образующими.)

184. Докажите, что замкнутая поверхность  $Q$  в том и только в том случае неориентируема, если в группе  $H_1(Q)$  имеется элемент порядка 2. Докажите также, что две замкнутые поверхности в том и только в том случае гомоморфны, если их одномерные группы гомологий изоморфны.

185. Докажите, что не существует клеточного разбиения тора, состоящего менее чем из четырех клеток.

Рассмотрим теперь нульмерные гомологии. Нульмерный цикл мы получаем, взяв вершины клеточного

разбиения с некоторыми целочисленными коэффициентами. Далее, граница ребра равна разности его концов: на рис. 184 имеем  $\partial r_1 = b - a$ ,  $\partial r_2 = 0$ . Два нульмерных цикла гомологичны, если их разность является границей

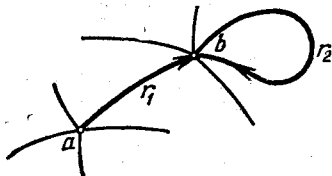


Рис. 184.

некоторой суммы одномерных клеток (с какими-то коэффициентами). Наконец, будем рассматривать нульмерные классы гомологий, объединяя в один класс все гомологичные между собой нульмерные циклы рассматриваемого полиэдра  $X$ . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть нульмерная группа гомологий  $H_0(X)$ .

### Задачи

186. Докажите, что если  $r_1, r_2, \dots, r_k$  — простая цепочка направленных ребер, идущая от вершины  $a$  к вершине  $b$ , то  $\partial(r_1 + r_2 + \dots + r_k) = b - a$ .

187. Докажите, что если  $X$  — связный полиэдр, то любой нульмерный цикл в  $X$  гомологичен одной точке, взятой с некоторым коэффициентом, т. е. группа  $H_0(X)$  является свободной циклической.

188. Докажите, что если полиэдр  $X$  состоит из  $k$  компонент, то  $H_0(X)$  есть свободная абелева группа с  $k$  образующими.

Аналогично определяется двумерная группа гомологий  $H_2(X)$ : нужно в  $X$  рассматривать двумерные циклы и натянутые на них трехмерные «пленки».

**Пример 56.** Пусть  $X$  состоит из всех точек трехмерного пространства, лежащих на торе и внутри него («полный тор»). Полиэдр  $X$  можно представить в виде клеточного разбиения, в котором, кроме клеток  $a, b, c$ , расположенных на торе, имеется еще одна двумерная клетка  $c'$  («поперечное сечение» тора), границей которой служит меридиан  $b$ , и одна трехмерная клетка  $v$  — внутренности тора, рассеченная по клетке  $c'$ . Границы клеток имеют следующие значения:

$$\partial a = 0, \quad \partial b = 0, \quad \partial c = 0, \quad \partial c' = b, \quad \partial v = c$$

(заметим, что трехмерная клетка  $v$  с двух сторон примыкает к двумерной клетке  $c'$ , причем с одной стороны ориентация клетки  $c'$  наблюдается, как ориентация по часовой стрелке, а с другой стороны — против стрелки; поэтому в  $\partial v$  клетка  $c'$  не входит).

Одномерные циклы этого клеточного разбиения имеют вид  $ka + lb$  (где  $k, l$  — целые), причем цикл  $b$  гомологичен нулю (на него натянута пленка  $c'$ ). Следовательно, любой одномерный цикл гомологичен  $ka$ , и потому группа  $H_1(X)$  — свободная циклическая. Далее, так как  $\partial(tc + pc') = pb$ , то  $tc + pc'$  только в том случае является двумерным циклом (т. е. имеет границу, равную нулю), если  $p = 0$ . Итак, двумерные циклы имеют вид  $tc$ . Но любой такой цикл гомологичен нулю (поскольку  $\partial v = c$ , т. е.  $v$  есть «трехмерная пленка», натянутая на двумерный цикл  $c$ ). Следовательно, группа  $H_2(X)$  тривиальна.

В ряде случаев удобно вместо вычисления всей группы гомологий  $H_r(X)$  ограничиться лишь нахождением ранга этой группы; он называется  $r$ -мерным числом Бетти полиэдра  $X$  и обозначается через  $\beta_r(X)$ . Определение



чисел Бетти можно сформулировать и иначе. Говорят, что  $r$ -мерные циклы  $z_1, \dots, z_n$  в  $X$  гомологически независимы, если, каковы бы ни были целые числа  $k_1, \dots, k_r$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, цикл  $k_1 z_1 + \dots + k_r z_r$  не гомологичен нулю в  $X$ . Теперь  $r$ -мерное число Бетти  $p_r(X)$  определяется как наибольшее число гомологически независимых  $r$ -мерных циклов в  $X$ .

В качестве примера применения чисел Бетти приведем (без доказательства) следующую теорему о вычислении эйлеровой характеристики. Пусть  $X$  — некоторый полиэдр; рассмотрим какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через  $\alpha_r$  число  $r$ -мерных клеток этого разбиения ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогда эйлерова характеристика полиэдра  $X$ , т. е. число  $\chi(X) = \sum (-1)^r \alpha_r$ , может быть вычислена по его числам Бетти:  $\chi(X) = \sum (-1)^r p_r(X)$  (суммирование распространено на все значения  $r = 0, 1, 2, \dots$  вплоть до наибольшей из размерностей клеток полиэдра  $X$ ).

**Пример 57.** Трехмерная сфера  $S^3$  определяется как граница шара в четырехмерном пространстве  $R^4$ ; в декартовых прямоугольных координатах  $x_1, x_2, x_3, x_4$  она определяется уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Рассматривая «четырёхмерный аналог» рисунков 157 (с. 117) и 7 (с. 12), нетрудно доказать, что трехмерная сфера с выколотой точкой гомеоморфна трехмерному евклидову пространству, а потому — открытому трехмерному шару. Следовательно, трехмерную сферу можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего только из двух клеток: нульмерной клетки  $o$  и трехмерной клетки  $v$ . Поэтому (ср. пример 54) группы гомологий  $H_0(S^3)$  и  $H_3(S^3)$  являются свободными циклическими, а в остальных размерностях группы гомологий трехмерной сферы тривиальны. Из этого следует, что  $p_0(S^3) = p_3(S^3) = 1$ ,  $p_1(S^3) = p_2(S^3) = 0$ .

**Пример 58.** Подобно тому, как склеивание противоположных сторон квадрата дает т о р, склеивание противоположных граней куба дает трехмерный тор  $T^3$  (его не следует путать с полным тором, см. пример 56). Например, на гранях  $ABCD$  и  $abcd$  (рис. 185) склеиваются между собой точки, которые являются концами отрезка, параллельного ребрам  $Aa, Bb, Cc, Dd$ . Все вер-

шины куба склеиваются вместе, что дает одну нульмерную клетку. Далее, все параллельные ребра склеиваются вместе; после склеивания остаются три одномерные клетки. Попарное склеивание противоположных граней дает три двумерные клетки. Наконец, мы имеем одну трехмерную клетку. Это и дает клеточное разбиение трехмерного тора  $T^3$ . Каждая из клеток имеет границу, равную нулю, и потому группа гомологий  $H_3(T^3)$  трехмерного тора  $T^3$  является свободной циклической, а каждая из

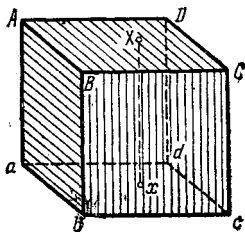


Рис. 185.

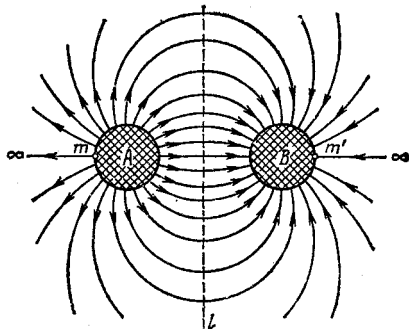


Рис. 186.

групп  $H_1(T^3)$ ,  $H_2(T^3)$  является свободной абелевой группой с тремя образующими. Из этого следует, что  $p_0(T^3) = p_3(T^3) = 1$ ,  $p_1(T^3) = p_2(T^3) = 3$ .

**Пример 59.** Покажем, что из двух полных торов, склеивая их друг с другом границами, можно получить трехмерную сферу. Тор (см. рис. 5 на с. 12) разбивает пространство на две части: внутреннюю, представляющую собой полный тор, и внешнюю. При пополнении трехмерного пространства одной точкой (в результате чего получается трехмерная сфера) внешняя часть также превращается в полный тор (что и дает разбиение трехмерной сферы на два склеенных между собой полных тора). Это ясно из рассмотрения рис. 186. При вращении этого чертежа вокруг прямой  $l$  каждая «силовая линия», начинающаяся на «заряде»  $A$  и кончающаяся на  $B$  (включая и линию  $m \infty m'$ , которая представляет собой одну линию, ибо имеется только одна бесконечно удаленная точка), дает топологический круг, и все такие круги заполняют внешность тора, получающегося при вращении «зарядов»  $A$  и  $B$ . Этих кругов имеется столько,

сколько точек на окружности «заряда»  $A$ . Таким образом, внешность тора (пополненная одной бесконечно удаленной точкой) гомеоморфна полному тору.

### Задачи

189. Докажите, что для трехмерного шара  $X$  группы  $H_1(X)$ ,  $H_2(X)$ ,  $H_3(X)$  тривиальны.

190. Рассмотрим часть трехмерного пространства, ограниченную двумя концентрическими сферами («трехмерное кольцо»), и отождествим (склеим) каждые две точки этих сфер, лежащие на одном радиусе. Докажите, что у получающегося полиэдра  $X$  все группы гомологий  $H_0(X)$ ,  $H_1(X)$ ,  $H_2(X)$ ,  $H_3(X)$  — свободные циклические.

191. Вычислите группы гомологий полиэдра, представляющего собой объединение поверхности  $P_k$  и ее внутренней области.

192. Вычислите гомологии *трехмерного проективного пространства*, которое получается из трехмерного шара, если на его границе склеить каждые две диаметрально противоположные точки.

193. Докажите, что любая замкнутая поверхность может быть без самопересечений расположена в трехмерном проективном пространстве.

194. Пусть  $X$  — полиэдр, рассматриваемый в некотором клеточном разбиении и  $\alpha_r$  — число его  $r$ -мерных клеток ( $r = 0, 1, \dots, n$ , где  $n$  — наибольшая из размерностей клеток). Докажите, что для любого  $r = 0, 1, \dots, n - 1$  справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \alpha_k \geq \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} p_k(X).$$

**У к а з а н и е.** Рассмотрите  $r$ -мерный остов  $X^r$  полиэдра  $X$  (состоящий из всех клеток рассматриваемого разбиения, имеющих размерность  $\leq r$ ) и докажите соотношения

$$p_0(X^r) = p_0(X), \quad p_1(X^r) = p_1(X), \quad \dots, \\ p_{r-1}(X^r) = p_{r-1}(X), \quad p_r(X^r) \geq p_r(X).$$

Отметим в заключение, что при построении групп гомологий можно было бы в качестве коэффициентов брать не целые числа, а вычеты по модулю 2, вычеты по модулю  $m$  (или, вообще, элементы некоторой абелевой группы  $G$ ). Получающиеся группы гомологий обозначаются через  $H_r(X, Z_2)$ ,  $H_r(X, Z_m)$ ,  $H_r(X, G)$ . Например, если коэффициентами являются вычеты по модулю 2, то все клетки можно рассматривать *не ориентированными*. В случае, когда группой коэффициентов является циклическая группа порядка  $p$ , где  $p$  — простое число, группа гомологий  $H_r(X, Z_p)$  является прямой суммой нескольких групп, изоморфных  $Z_p$ ; число слагаемых в этой прямой сумме называется  *$r$ -мерным числом Бетти полиэдра  $X$  по модулю  $p$* .

## Задачи

195. Докажите, что для проективной плоскости  $N_2$  группы  $H_0(N_1, Z_2)$ ,  $H_1(N_1, Z_2)$ ,  $H_2(N_1, Z_2)$  являются группами второго порядка.

196. Докажите, что поверхности  $P_k$  и  $N_{2k}$  имеют (во всех размерностях) одинаковые группы гомологий по модулю 2.

197. Вычислите для трехмерного проективного пространства (см. задачу 192) гомологии по модулю 2.