27. Топологическое произведение

Пример 60. Каждая точка цилиндра E (рис. 187) может быть задана парой точек (x, y), где x лежит на нижнем основании B, а y — на образующей F: проведя через x отрезок, параллельный F, а через y — круг, параллельный B, мы получим на их пересечении искомую точку цилиндра. Таким образом, *цилиндр E можно*

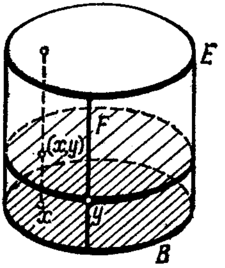

Рис. 187.

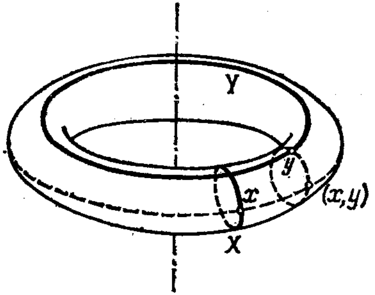

Рис. 188.

рассматривать как множество всех пар (x, y), где x — точка одной фигуры B (круга), а y — точка другой фигуры F (отрезка).

Пример 61. На торе E (рис. 188) проведем меридиан B и параллель F. Для задания любой точки тора достаточно указать точку $x \in B$ и точку $y \in F$: проведя через x параллель, а через y меридиан, мы получим на их пересечении искомую точку тора. Таким образом, *тор E можно рассматривать как множество всех пар (x, y), где $x \in B$, $y \in F$.*

В рассмотренных примерах мы имели *топологическое произведение* фигур B и F: цилиндр есть топологическое произведение круга и отрезка, тор — топологическое произведение двух окружностей. Вообще, *фигура E называется топологическим произведением фигур B и F,* *если E можно рассматривать как множество всевозможных пар (x, y), где $x \in B$, $y \in F$.* Отметим, что здесь говорится лишь о том, из каких точек состоит фигура E, но следует еще указать топологию в фигуре E. Наглядно эту топологию можно описать, сказав, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) фигуры E будут «близкими», если x_1 и x_2 являются «близкими» в B, а y_1 и y_2 являются «близкими» в F.

Существенно, чтобы каждой точке фигуры E соответствовала некоторая пара (x, y) и чтобы различные пары соответствовали различным точкам фигуры E.

Пример 62. Рассмотрим на сфере *экватор B* и *нулевой меридиан F*. Для задания точки на сфере достаточно указать ее *географические координаты*, т. е. точки $x \in B$, $y \in F$, проведя через эти точки меридиан и параллель (рис. 189), мы получим на их пересечении искомую точку (x, y) сферы. Но это не значит, что сфера — топологическое произведение экватора и меридиана; действительно, если x и x' — две различные точки экватора, а n — верхний конец меридиана (северный полюс), то различным парам (x, n) и (x', n) соответствует одна и та же точка n на сфере.

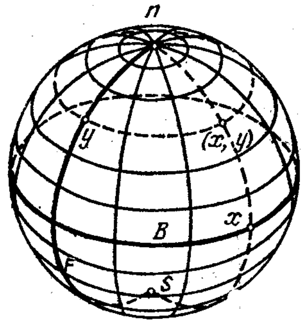

Рис. 189.

Задачи

198. Докажите, что кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями, есть топологическое произведение окружности и отрезка.

199. Докажите, что полный тор (пример 56) является топологическим произведением круга и окружности.

200. Докажите, что полиэдр X, рассмотренный в задаче 190, является топологическим произведением сферы и окружности.

201. Докажите, что трехмерный тор T^3 является топологическим произведением обычного (двумерного) тора и окружности. Можно также сказать, что T^3 — топологическое произведение трех окружностей.

Рассмотрим теперь вопрос о гомологических свойствах топологического произведения, ограничиваясь для простоты рассмотрением не групп гомологий, а лишь чисел Бетти. Если в примере 61 считать меридиан и параллель одномерными циклами, то их топологическое произведение (тор) будет двумерным циклом. Вообще, если E — топологическое произведение полиэдров B и F, в которых соответственно взяты циклы z, z' размерностей r, r', то можно рассмотреть п р о и з в е д е н и е этих циклов, которое будет $(r+r')$-мерным циклом в полиэдре E. Оказывается, что таким путем (перемножением циклов, взятых в B и F) можно получить систему гомологически независимых циклов в полиэдре E. Для этого нужно сначала взять максимальное число гомологически независимых нульмерных циклов в B и r-мерных циклов в F; перемножая эти циклы, мы получим $p_0(B)\,p_r(F)$ циклов в E, имеющих размерность r. Затем нужно взять максимальное число гомологически независимых одномерных циклов в B и $(r-1)$-мерных в F; перемножая, мы получим еще $p_1(B)\,p_{r-1}(F)$ циклов в E, имеющих размерность r. Затем нужно взять двумерные циклы в B и $(r-2)$-мерные в F и т. д. Соединяя все полученные циклы вместе, мы и получим максимальное число r-мерных гомологически независимых циклов в полиэдре E. Таким образом, *если E — топологическое произведение полиэдров B и F, то*

$$p_r(E) = p_0(B)\,p_r(F) + p_1(B)\,p_{r-1}(F) + p_2(B)\,p_{r-2}(F) + \ldots + p_r(B)\,p_0(F).$$

Этой формуле можно дать следующее «графическое» истолкование. Составим таблицу, у которой на пересечении i-го столбца и j-й строки стоит число $p_i(B)\,p_j(F)$:

$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$p_j(F)$	$p_0(B)\,p_j(F)$	$p_1(B)\,p_j(F)$	$\ldots$	$p_i(B)\,p_j(F)$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$p_2(F)$	$p_0(B)\,p_2(F)$	$p_1(B)\,p_2(F)$	$\ldots$	$p_i(B)\,p_2(F)$	$\ldots$
$p_1(F)$	$p_0(B)\,p_1(F)$	$p_1(B)\,p_1(F)$	$\ldots$	$p_i(B)\,p_1(F)$	$\ldots$
$p_0(F)$	$p_0(B)\,p_0(F)$	$p_1(B)\,p_0(F)$	$\ldots$	$p_i(B)\,p_0(F)$	$\ldots$
	$p_0(B)$	$p_1(B)$	$\ldots$	$p_i(B)$	$\ldots$

Тогда суммирование чисел, стоящих на r-й диагонали этой таблицы, и дает r-мерное число Бетти полиэдра E:

$p_0(B)\,p_r(F)$			
	$p_1(B)\,p_{r-1}(F)$		
		$\ldots$	
			$p_r(B)\,p_0(F)$

Задачи

202. Составьте указанную таблицу для топологического произведения сферы и окружности; вычислите этим приемом числа Бетти полиэдра, рассмотренного в задаче 190 (см. также задачу 200).

203. Докажите, что если полиэдр E является топологическим произведением полиэдров B и F, то $\chi(E) = \chi(B)\cdot\chi(F)$.

204. Вычислите числа Бетти n-мерного тора (т. е. топологического произведения n окружностей).

205. Докажите, что трехмерная сфера не гомеоморфна топологическому произведению окружности и некоторой поверхности. То же докажите для трехмерного проективного пространства.