28. Расслоения

Вернемся к примеру 60 и обозначим через p проекцию цилиндра E на его основание B. Для каждой точки $x \in B$ прообраз $p^{-1}(x)$ представляет собой отрезок, параллельный F. Эти отрезки будем называть *слоями.* Над каждой точкой x базисной фигуры B расположен («растет») соответствующий слой, а весь цилиндр *расслаивается* и представляет собой объединение всех слоев (как бы связку стерженьков).

Вообще *проекция* p, *ставящая в соответствие точке* $(x, y) \in E$ точку $x \in B$, отображает топологическое произведение E фигур B и F на *базу* B, причем прообраз $p^{-1}(x)$ любой точки $x \in B$ (*слой*, «растущий над x»), гомеоморфен F. Это можно проследить в примере 61 и в задачах 198—201.

Рассмотрим теперь проекцию p винтовой линии E на окружность B (см. пример 48 на с. 110). Каждый прообраз $p^{-1}(x)$ («слой, растущий над точкой $x \in B$») гомеоморфен множеству F, состоящему из точек $\ldots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ числовой прямой. Этот пример отличается от топологического произведения окружности B и слоя F (которое состоит из бесконечного числа отдельных окружностей; рис. 190). Однако прообраз $p^{-1}(U)$ окрестности U распадается на отдельные листы, т. е. $p^{-1}(U)$ есть топологическое произведение окрестности U и слоя F (см. рис. 146 на с. 110). Иначе говоря, локально (т. е. в окрестности каждой точки $x \in B$) E является топологическим произведением, но в целом — нет. В топологии в таких случаях используют термин *локально тривиальное расслоение* (т. е. топологическое произведение считается в топологии «тривиальным» расслоением). Вообще, *любое накрытие является локально тривиальным расслоением, причем слой F этого расслоения состоит из изолированных точек.* В примере 49 (с. 111) слой состоит из двух точек, накрытие E представляет собой ориентируемую поверхность, а база B — неориентируемую.

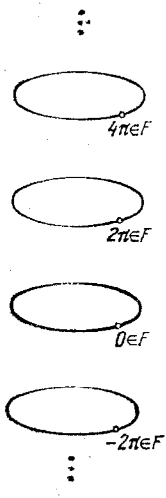

Рис. 190.

Пример 63. Обозначим через B среднюю линию ленты Мёбиуса E. Через каждую точку $x \in B$ проходит поперечный отрезок, который мы будем считать слоем, «растущим» над точкой x (эти поперечные отрезки получаются из поперечных отрезков прямоугольной ленты при склеивании ее в ленту Мёбиуса). Отображая каждый поперечный отрезок в соответствующую точку x, мы получаем *проекцию* $p: E \to B$, причем $p^{-1}(x)$ есть слой над точкой $x \in B$. Это расслоение локально тривиально. В самом деле, если взять на окружности B небольшую дугу U, то ее прообраз $p^{-1}(U)$ представляет собой топологическое произведение дуги U и слоя F (рис. 191). В целом же лента Мёбиуса E не является топологическим произведением окружности B и отрезка F (см. задачу 198).

Пример 64. Еще одним примером локально тривиального расслоения служит *нормированный касательный пучок* поверхности. Пусть B — ориентируемая поверхность. Обозначим через E множество всех векторов длины 1, касающихся поверхности B. Через $p: E \to B$ обозначим отображение, сопоставляющее каждому касательному вектору $z \in E$ ту точку $x \in B$, из которой этот вектор «растет». Слой $p^{-1}(x)$ над точкой $x \in B$ (состоящий из всех векторов длины 1, касающихся поверхности в точке x) гомеоморфен окружности. Отображение

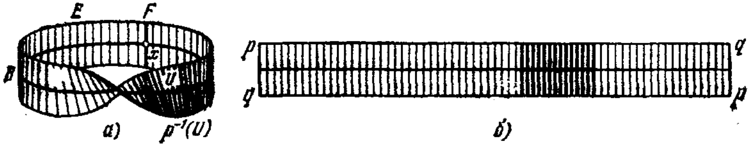

Рис. 191.

$p: E \to B$ является локально тривиальным расслоением. В самом деле, маленькую окрестность U точки x на поверхности B можно считать кусочком плоскости, и потому каждый вектор z, касающийся поверхности B в какой-либо точке $x \in U$, может быть задан как пара (x, y), где y — точка единичной окружности F (рис. 192). Иначе говоря, $p^{-1}(U)$ представляется в виде топологического произведения окрестности U и окружности F.

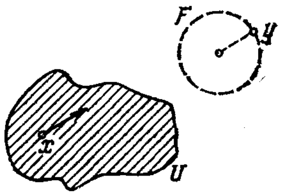

Рис. 192.

Пусть, в частности, E — нормированный касательный пучок сферы S^2 (т. е. множество всех единичных векторов, касающихся этой сферы). Пространство E можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из четырех клеток. В самом деле, пусть $x_0 \in S^2$ и F_0 — слой над точкой x_0. Выберем точку $\tau^0 \in F_0$ и оставшуюся часть слоя F_0 (одномерную клетку) обозначим через τ^1. Далее, пусть v — векторное поле на сфере S^2, имеющее в точке x_0 единственную особенность (с индексом $+2$). Поле v можно рассматривать как двумерную клетку в E. Эта клетка проектируется на всю сферу S^2 с выколотой точкой x_0, а с каждым слоем (кроме F_0) пересекается в одной точке. Наконец, выбросив из E клетки $\tau^0, \tau^1, \tau^2 = v$, мы получим множество τ^3, гомеоморфное открытому трехмерному шару. Таким образом, E представляется в виде клеточного разбиения $\{\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3\}$. Заметим, что граница клетки $v = \tau^2$ представляет собой дважды обегаемый слой F_0, т. е. $\partial\tau^2 = 2\tau^1$. Остальные клетки имеют нулевую границу: $\partial\tau^3 = 0$, $\partial\tau^1 = 0$, $\partial\tau^0 = 0$. Из этого нетрудно заключить, что числа Бетти пространства E имеют следующие значения: $p_0(E) = p_3(E) = 1$, $p_1(E) = p_2(E) = 0$. Заметим, что при рассмотрении гомологий по модулю 2 имеем $\partial\tau^2 = 0$, и потому числа Бетти пространства E по модулю 2 имеют вид $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$.

Задачи

206. Докажите, что бутылку Клейна можно представить в виде локально тривиального расслоения, базой и слоем которого является окружность.

207. Докажите, что нормированный касательный пучок двумерного тора T гомеоморфен трехмерному тору.

208. Докажите, что если локально тривиальное расслоение имеет своей базой двумерную сферу, а слоем — окружность, то пространство E этого расслоения можно получить из двух полных торов, склеивая их границами.

209. Докажите, что если базой локально тривиального расслоения является окружность, а слоем — отрезок, то E гомеоморфно либо круговому кольцу, либо ленте Мёбиуса.

Французскому математику Жану Лере принадлежит важная теорема о гомологиях расслоенных пространств. Мы сформулируем ее здесь в упрощенном виде.

Пусть $p: E \to B$ — некоторое расслоение, базой которого является связный полиэдр, имеющий тривиальную фундаментальную группу, а слоем — произвольный полиэдр. Составим таблицу, которую мы имели для случая, когда E — топологическое произведение фигур B и F, и в этой таблице наметим стрелки «ходом коня» (рис. 193). На каждой стрелке надпишем некоторое неотрицательное целое число, придерживаясь следующих правил: 1) число, стоящее в каждой клетке, н е   м е н ь ш е, чем сумма чисел, надписанных на тех двух стрелках, одна из которых входит в данную клетку, а другая выходит из нее; 2) если начало или конец стрелки выходят за пределы таблицы, то на этой стрелке надписывается число 0. То, что получается, назовем *таблицей* E_2.

Теперь составим новую таблицу. В каждой клетке поставим новое число, получающееся, если из числа, ранее стоявшего в этой клетке, вычесть сумму чисел, на входящей и исходящей стрелках. Затем наметим стрелки «удлиненным ходом коня» (рис. 194) и на них надпишем числа по тем же правилам. Это дает *таблицу* E_3.

Таким же путем из таблицы E_3 получаем *таблицу* E_4 и т. д. Вообще в *таблице* E_n стрелки ведут на n клеток влево и на $n-1$ клетку вверх.

Ясно, что какую бы мы ни взяли клетку, стоящие в ней числа (в таблицах $E_2, E_3, E_4, \ldots$) в конце концов перестанут меняться, стабилизируются; стрелки становятся все

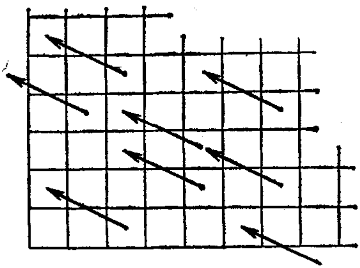

Рис. 193.

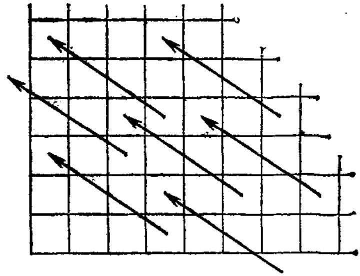

Рис. 194.

длиннее и в конце концов будут выходить за пределы таблицы. Таблицу, составленную из стабилизировавшихся чисел, назовем *таблицей* E_∞ (стрелок в ней нет). Теорема Лере утверждает, что *существует такой способ надписывания чисел на стрелках, при котором суммирование чисел, стоящих на r-й диагонали таблицы* E_∞, *дает r-мерное число Бетти пространства E.* Аналогичная теорема справедлива и для чисел Бетти по простому модулю p.

Пример 65. Пусть $p: E \to B$ — некоторое расслоение, базой которого служит сфера S^2, а слоем — окружность S^1. Тогда $p_0(B) = p_2(B) = 1$, $p_0(F) = p_1(F) = 1$, а остальные числа Бетти базы и слоя равны нулю. Поэтому таблица E_2 имеет вид, показанный на рис. 195 (во всех клетках, кроме указанных четырех, записано число 0; на всех стрелках, кроме указанной, надписано число 0). На указанной стрелке может быть надписано либо число 0, либо 1. Таблица E_3 совпадает с E_∞ (все стрелки выходят за пределы таблицы). Следовательно, по теореме Лере, пространство E рассматриваемого расслоения может иметь либо числа Бетти $p_0(E) = p_1(E) = p_2(E) = p_3(E) = 1$ (если на стрелке надписан 0), либо число Бетти $p_2(E) = p_3(E) = 1$, $p_1(E) = p_2(E) = 0$ (если надписана единица). Первая возможность реализуется, например, для топологического произведения сферы S^2 и окружности S^1 (см. задачу 200). Вторая возможность реализуется для касательного пучка сферы S^2 (см. пример 64).

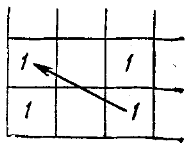

Рис. 195.