29. Теория Морса

Наличие горизонтальной касательной — необходимое условие для того, чтобы дифференцируемая функция достигала максимума или минимума (локального) во внутренней точке x_0 своей области определения. Однако это условие не является достаточным: *в точке перегиба* с горизонтальной касательной функция не достигает ни максимума, ни минимума.

Заметим, что точки максимума и минимума устойчивы относительно малых «шевелений» графика (рис. 196, *а*). Точка перегиба (с горизонтальной касательной) устойчивостью не обладает: при «шевелении» графика она может пропасть (т. е. вблизи нее не будет точек с горизонтальной касательной; рис. 196, *б*).

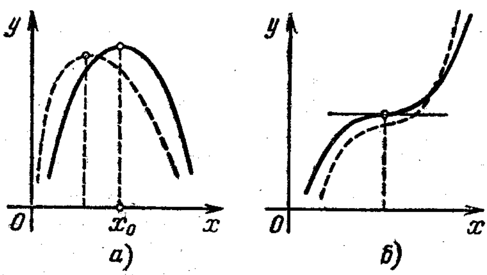

Рис. 196.

Для функций от двух переменных x, y (заданных в некоторой области на плоскости) можно указать аналогичное необходимое условие: *для того чтобы функция $f(x, y)$ достигала локального максимума или минимума во внутренней точке (x_0, y_0) своей области определения, необходимо, чтобы эта точка была критической, т. е. чтобы график функции имел в точке (x_0, y_0) горизонтальную касательную плоскость.*

Пример 66. На рисунке 197 изображены графики функций

$$f_0(x, y) = c + x^2 + y^2, \quad f_1(x, y) = c + x^2 - y^2,$$
$$f_2(x, y) = c - x^2 - y^2. \qquad (21)$$

Точка (0; 0) является для каждой из них критической: для $f_0(x, y)$ — это точка минимума, для $f_2(x, y)$ — точка максимума, а функция $f_1(x, y)$ не имеет в точке (0; 0) ни максимума, ни минимума — это так называемая седловая точка. Все эти точки **устойчивы** относительно малых «шевелений» графика. Существуют и более сложные критические точки; например, функция $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ имеет в начале координат «седло третьего порядка» (три

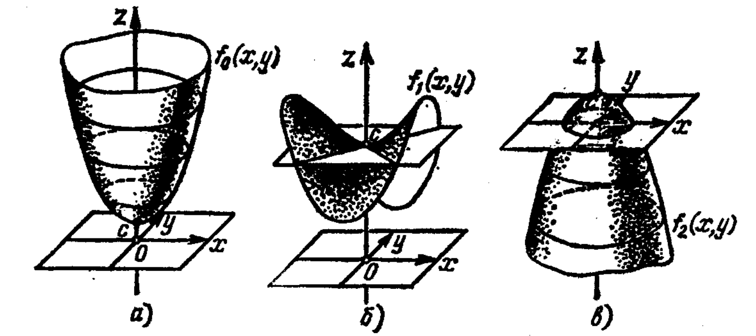

Рис. 197.

спуска и три подъема, а не два, как на рис. 197, б). Однако как угодно малым «шевелением» графика можно добиться, чтобы **все** критические точки стали **невырожденными** — такими, как на рис. 197.

Можно также рассматривать функции, заданные не на плоскости, а на поверхности — ведь вблизи каждой своей точки поверхность топологически устроена так же, как плоскость.

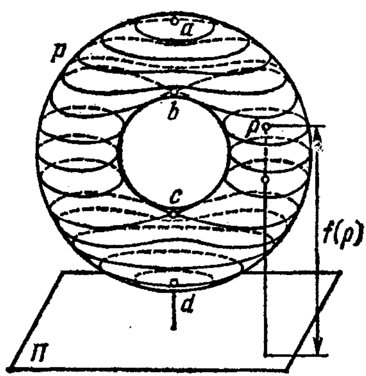

Рис. 198.

Пример 67. Для любой точки p, принадлежащей тору T, обозначим через $f(p)$ **высоту** точки p над горизонтальной плоскостью Π. Эта функция имеет (при показанном на рис. 198 расположении тора) одну точку максимума a, одну точку минимума d и две седловые точки b, c. Таким образом, если мы обозначим через C_0 число точек минимума, через C_1 — число седловых точек, а через C_2 — число точек максимума, то в этом примере $C_0 = 1$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, и потому $C_0 - C_1 + C_2 = 0$.

Пример 69. Для сферы, расположенной обычным образом, та же функция $f(p)$ («высота» точек над горизонтальной плоскостью) имеет две критические точки: точку минимума («южный полюс») и точку максимума («северный полюс»). Таким образом, в этом случае $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т. е. $C_0 - C_1 + C_2 = 2$.

Рассмотренные примеры подводят к формулировке теоремы о критических точках, принадлежащей английскому математику Морсу. Условимся говорить, что точка минимума имеет индекс 0, седловая точка — индекс 1, а точка максимума — индекс 2. Теперь мы можем сформулировать «первую половину» теоремы Морса (для случая поверхности): *пусть на поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки*; *тогда*

$$C_0 - C_1 + C_2 = \chi(Q), \tag{22}$$

где C_0 — число критических точек индекса 0 (т. е. точек минимума), C_1 — число критических точек индекса 1 (седел), C_2 — число критических точек индекса 2 (точек максимума).

В самом деле, функция f определяет на поверхности Q *линии уровня* (вдоль каждой из которых функция f принимает постоянное значение). Кроме того, можно на Q наметить *линии наискорейшего спуска*, вдоль которых функция f наиболее быстро убывает; они перпендикулярны линиям уровня. Векторы, касающиеся линий наискорейшего спуска, образуют векторное поле на поверхности Q. В точках, не являющихся критическими, это векторное поле не имеет особенностей. На рис. 199

Рис. 199.

показан вид векторного поля вблизи точки минимума (a), седловой точки ($б$), точки максимума ($в$). Легко проверяется, что $j = (-1)^k$, где j — индекс особенности векторного поля, а k — индекс критической точки (см. рис. 89 на с. 69). Следовательно, рассматриваемое векторное поле имеет C_0 особенностей с индексом $+1$ (минимумы), C_1 особенностей с индексом -1 (седловые точки) и еще C_2

особенностей с индексом $+1$ (максимумы). Из теоремы Пуанкаре о векторных полях (п. 14) теперь следует справедливость формулы (22) для любой замкнутой ориентируемой поверхности.

Задачи

210. Докажите, что формула (22) справедлива и для любой замкнутой неориентируемой поверхности.

211. Докажите, что если на поверхности P_k задана функция, все критические точки которой невырождены, то число критических точек не меньше $2k+2$.

Рассмотрим теперь «вторую половину» теоремы Морса: пусть на *поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки; тогда*

$$C_0 \geqslant p_0(Q), \quad C_1 - C_0 \geqslant p_1(Q) - p_0(Q). \tag{23}$$

Для доказательства продолжим предыдущие рассуждения. Будем считать, что значения, которые функция f принимает в критических точках, попарно различны. Мы можем считать критические точки $a_1, \ldots, a_q$ перенумерованными таким образом, что $f(a_1) > f(a_2) > \ldots > f(a_q)$.

Вблизи a_1 (точки наибольшего максимума, рис. 200, *а*) линии уровня замкнуты и окружают точку a_1. Разрезав поверхность по одной из этих линий, мы получим двумерную клетку τ_1 и остаток Q (рис. 200, *б*).

Теперь упростим фигуру Q_1. Для этого рассмотрим линию уровня, проходящую чуть выше точки a_2, и отрежем от Q_1 часть F_1, расположенную выше этой линии уровня (рис. 200, *в*). Оставшуюся часть поверхности обозначим через Q_1'. Так как между a_1 и a_2 критических точек нет, то вся часть F_1 заполнена «параллельно идущими» линиями наискорейшего спуска, и по этим линиям можно F_1 «сдвинуть» вниз в Q_1'. Так как при этом сдвиге (как и при всякой гомотопии) любой цикл переходит в гомологичный, то фигура Q_1 имеет те же гомологии, что и Q_1'.

Рассмотрим линию уровня l, проходящую чуть ниже точки a_2, и обозначим через Q_2 часть поверхности, лежащую ниже этой линии. Пусть, например, a_2 является седлом. Мы можем сдвинуть (по линиям наискорейшего спуска) Q_1' в Q_2 — всюду, за исключением окрестности точки a_2 (рис. 200, *г*). Затем можно сжать оставшуюся «перемычку» в одномерную клетку τ_2, приклеенную к Q_2 (рис. 200, *д*). Эти деформации не изменяют гомологий. Следовательно, первоначальная поверхность Q имеет те

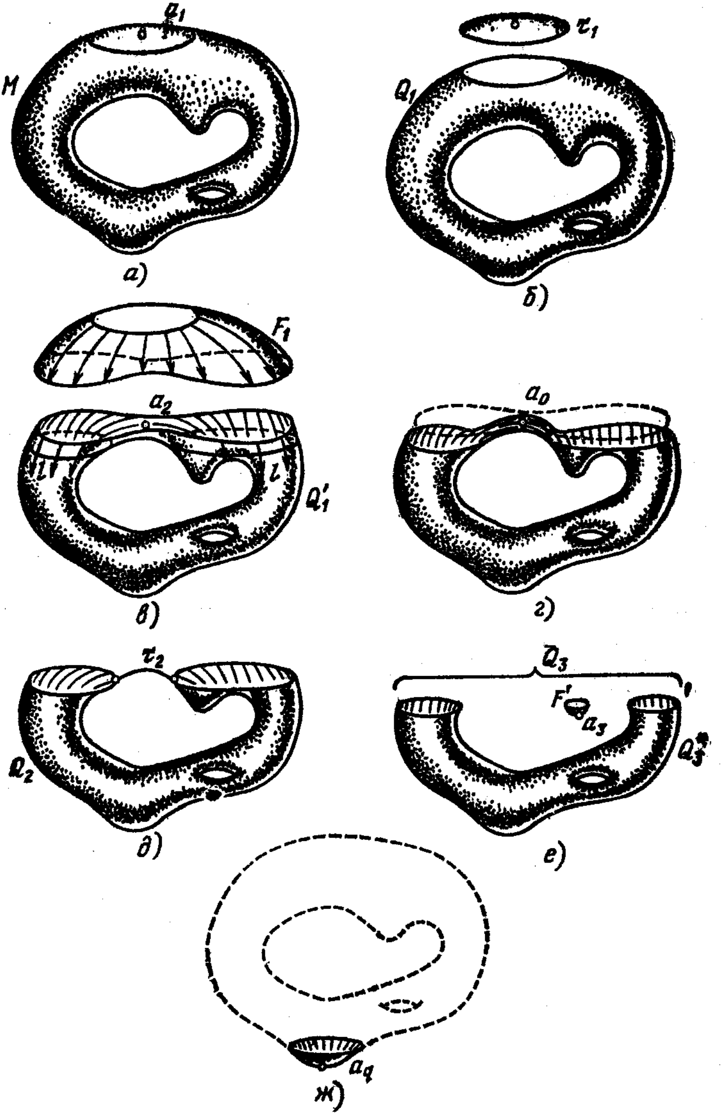

Рис. 200.

же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q_2 приклеиванием одномерной клетки τ_2 (соответствующей седлу), а затем двумерной клетки τ_1 (соответствующей максимуму).

Далее мы сдвинем Q_2 в часть Q_2', лежащую ниже линии уровня, проходящей чуть выше точки a_3. Если a_3 есть точка минимума, то оставшаяся вблизи точки a_3 часть F' поверхности (т. е. круг) имеет те же гомологии, что и точка, т. е. нульмерная клетка τ_3 (рис. 200, *е*). Обозначив фигуру, получающуюся из Q_3 отбрасыванием куска F', через Q_3^*, мы находим, что первоначальная поверхность Q имеет те же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q_3^* добавлением нульмерной клетки τ_3, одномерной τ_2, двумерной τ_1.

В конце концов, мы оставим от первоначальной поверхности последнюю точку минимума a_q (рис. 200, *ж*). Идя обратным путем, мы найдем, что фигуру, имеющую те же гомологии, что и поверхность Q, можно получить последовательным приклеиванием клеток: каждой точке минимума соответствует нульмерная клетка, седлу — одномерная клетка, а максимуму — двумерная. Иначе говоря, *Q имеет те же гомологии, что и некоторый полиэдр, содержащий C_0 нульмерных, C_1 одномерных и C_2 двумерных клеток*. Из этого и вытекает справедливость неравенств (23) (см. задачу 194 на с. 133).

Задачи

212. Докажите, что соотношения (22), (23) справедливы для чисел Бетти по любому простому модулю p.

213. Докажите, что $C_r \geqslant p_r(Q)$, $r = 0, 1, 2$.

Заметим в заключение, что можно рассматривать функции и на «многомерных поверхностях» (в задачах 190, 192 и примерах 57, 58 рассматриваются «трехмерные поверхности»). На n-мерной «поверхности» Q имеется $n+1$ типов невырожденных критических точек (в формулах, аналогичных (21), может быть в правой части $0, 1, \ldots, n$ минусов). Теорема Морса (и рассмотренное ее доказательство) сохраняются и в этом случае. Например, неравенства (23) принимают вид

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_k \geqslant \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} p_k(Q), \qquad r = 0, 1, \ldots, n.$$