

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

В. П. Минеев

Многие математические понятия или даже целые теории, появившись на свет, долгие годы живут, не имея приложений вне самой математики. В качестве примера достаточно вспомнить историю с загадочными комплексными числами, вошедшими в физику и технику спустя несколько столетий после своего открытия. Хорошим примером подобного рода до недавнего времени могла служить и топология. Однако в течение последнего десятилетия в нескольких довольно далеких друг от друга областях физики возник ряд задач, получивших свою адекватную формулировку и решение на языке топологии, что позволило значительно продвинуться в соответствующих разделах физики.

Наглядную иллюстрацию к сказанному дает биофизика полимеров, имеющая дело с гигантскими молекулами белков и нуклеиновых кислот. Рассматривая положения, которые молекула может занимать в пространстве, мы сталкиваемся с ограничениями топологической природы. В самом деле, чисто математически длинная замкнутая молекула представляет собой замкнутую линию. Мы знаем, что такие линии образуют узлы. Различные узлы нельзя продеформировать друг в друга без разрыва линии и последующего склеивания концов. Условие неразрывности линий обеспечено тем, что для создания разрыва необходимо разорвать химические связи в данной точке полимерной цепи. Энергетические затраты такого процесса довольно значительны. Поэтому при достаточно низкой температуре вероятность разрывов мала и молекулы полимера могут существовать в состоянии с данной узельной конфигурацией практически неограниченно долго. Важный вопрос, какая часть молекул из общего числа молекул заданной длины обладает определенной узельной конфигурацией, решается на основе перечисления типов топологически различных узлов, известном из алгебраической топологии.

В биофизике полимеров сами длинные молекулы образуют топологические объекты — узлы. В других областях физики мы приходим к объектам, обладающим топологическими свойствами, уже не столь непосредственным образом. Так, в теории поля фигурируют частицы, математически описываемые векторными полями

с топологическими особенностями. В физике конденсированного состояния с топологией оказалась связана устойчивость ряда дефектов структуры упорядоченных веществ: обычных и жидких кристаллов, сверхпроводников, сверхтекучих жидкостей и ферромагнетиков. В этом приложении мы познакомимся с простейшим веществом, устойчивость дефектов которого имеет топологическую природу. Это нематический жидкий кристалл, часто называемый просто «нематик». Необходимые математические понятия: индекс векторного поля, фундаментальная группа, степень отображения и др., в приложении разъясняются весьма бегло. Точные определения и комментарии к ним можно найти в основном тексте книги.

1. Нематик

Нематический жидкий кристалл состоит из удлиненных молекул, взаимодействие между которыми стремится выстроить их параллельно друг другу. При высоких температурах тепловое движение препятствует этому и вещество представляет обычную жидкость (рис. 1, а). При температурах ниже некоторой критической (типичные значения температур перехода для нематиков порядка нескольких десятков градусов Цельсия) в жидкости

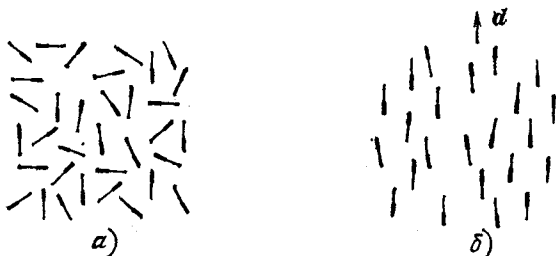


Рис. 1.

появляется выделенное направление, вдоль которого преимущественно ориентированы оси молекул. При этом, как и в обычной жидкости, распределение центров тяжести молекул нематика остается хаотическим (рис. 1, б). Небольшие отклонения осей молекул от параллельного друг другу направления связаны с тепловыми колебаниями. Математически направление преимущественной ориентации описывается с помощью единичного вектора d , называемого *директором*. Особое название вектора d связано с тем, что, хотя концы длинных молекул отличаются друг от друга, но их расположение неупорядоченно (см. рис. 1, б) и состояния нематика с противоположными направлениями вектора d (d и $-d$) физически неразличимы. Другими словами, векторы d можно

представлять не как стрелочки, а как палочки, задающие лишь направление (direction), но не его знак.

Из-за влияния стенок сосуда и внешних полей (например, магнитного) состояния нематика всегда неоднородны. Это значит, что направление директора \vec{d} постепенно меняется от точки к точке. Распределение \vec{d} в пространстве называется *векторным полем* единичного вектора \vec{d} .

2. Дисклинации в нематике

Благодаря сильному рассеянию света нематический жидкий кристалл выглядит как мутная непрозрачная жидкость. Если разглядывать ее в микроскоп, то можно заметить длинные тонкие нити, плавающие в жидкости. Именно они и дали название этому типу жидких кристаллов (нема — по-гречески «нить»). Еще в начале века исследователи понимали, а теперь это твердо

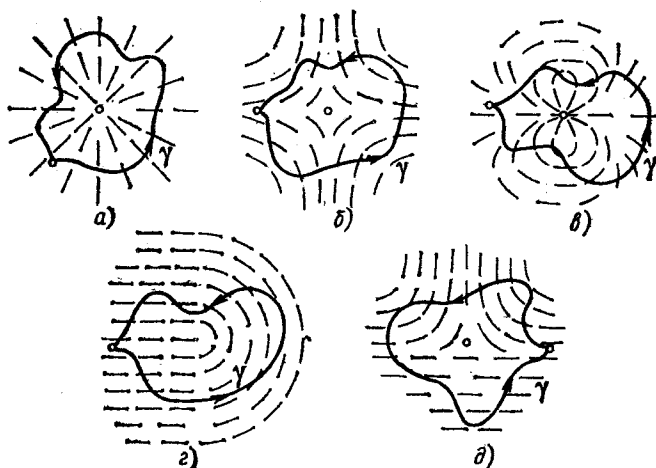


Рис. 2.

установленный факт, что нити в нематиках — не посторонние включения, а особенности в расположении молекул.

В самом деле, в поле направлений директора \vec{d} возможны особые линии, на которых направление \vec{d} не определено (разрывно). Такие распределения \vec{d} проще всего изобразить в случае плоских векторных полей, т. е., когда все векторы \vec{d} в пространстве параллельны некоторой плоскости (см. рис. 2, где поле директора показано черточками). Мы знаем, что особые точки векторных полей на плоскости характеризуются *индексами особой точки* — числом ν полных оборотов в положительном направлении, совершаемых

вектором d при обходе особой точки по замкнутому контуру γ . Так, особой точке, изображенной на рис. 2, a , соответствует индекс $\nu = 1$, на рис. 2, b — $\nu = -1$, на рис. 2, c — $\nu = 2$. Как мы помним, состояния, отличающиеся только знаком d , неразличимы, поэтому возможны особые точки, при обходе которых по замкнутому контуру γ вектор d совершает полуцелое число оборотов. Так, индекс особых точек, изображенных на рис. 2, e и d , равен соответственно $1/2$ и $-1/2$. Особые точки на рис. 2 представляют собой выход в плоскость рисунка особой линии в поле направлений d . Если взглянуть на особую линию рис. 2, a не «сверху», а «сбоку», то распределение d будет выглядеть, как показано на рис. 3, a . По предложению английского физика Франка линии разрыва в поле направлений директора были названы *дисклинациями*.

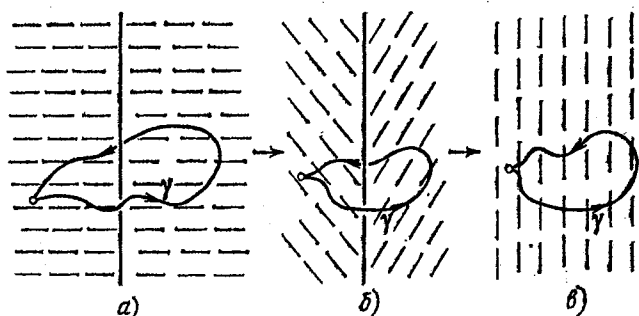


Рис. 3.

Так как взаимодействие между молекулами стремится выстроить их параллельно, наличие особых линий в распределении d энергетически невыгодно. Следовательно, в нематике должны возникать деформации распределения d , стремящиеся устранить особенности и перевести распределение в однородное, обладающее наименьшей энергией. Как это может произойти, легко увидеть на примере дисклинации, изображенной на рис. 3, a . Действительно, деформация, показанная на последовательности рисунков 3, a — c , переводит распределение в однородное, не обладающее никакими особенностями. Эта деформация поля d , напоминающая складывание зонтика, получила название «вытекание в третье измерение», так как направления d , первоначально лежащие в плоскости рис. 2, a , выстраиваются в перпендикулярном ей направлении (рис. 3, c). Таким образом, мы видим, что дисклинация, изображенная на рис. 2, a , 3, a , неустойчива по отношению к вытеканию в третье измерение. Спрашивается, устойчивы ли другие дисклинации? Как сформулировать признак, позволяющий отличать устойчивые дисклинации от неустойчивых?

Разумеется, любую дисклинацию можно уничтожить, создавая разрывы в поле директора, как это показано на последовательности рисунков 4, а — в. Заметим, однако, что в окрестности разрыва молекулы будут упорядочены не параллельно, как в нематике;

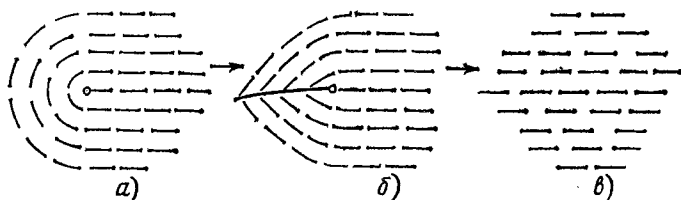


Рис. 4.

а под углом друг к другу, как в обычной жидкости. Значит, создание такого разрыва эквивалентно плавлению нематического порядка на целой полуплоскости, опирающейся на особую линию, что требует больших затрат энергии. Иначе говоря, этот процесс обладает колоссальным энергетическим барьером. Поэтому при исследовании устойчивости дисклинаций необходимо сразу ограничиваться лишь непрерывными деформациями поля d . Раз так, здесь может оказаться полезной топология.

3. Дисклинации и топология

Пусть в объеме, заполненном нематиком, имеется какое-то распределение векторов d . Иными словами, каждой точке r нашего объема поставлен в соответствие вектор d — задано векторное поле $d(r)$. Возьмем векторы d из разных точек объема и перенесем параллельно самим себе так, чтобы они начинались из одной точки (рис. 5, а и б). Тогда их концы будут лежать на поверхности сферы единичного радиуса, которая тем самым является областью изменения векторов d . Таким образом, мы получаем, что векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r нашего объема в точки на поверхности сферы единичного радиуса.

Заметим теперь, что сфера, по которой бегают концы вектора d , не совсем обычная. В самом деле, d не простой вектор, а вектор-директор, и состояния d и $-d$ физически неотличимы. Это значит, что диаметрально противоположные точки сферы эквивалентны или, как говорят в топологии, сфера склеена своими диаметрально противоположными точками. Такая сфера называется *проективной плоскостью* и обозначается RP^2 . Разумеется, представить результат склеивания диаметрально противоположных точек сферы в трехмерном пространстве невозможно, да и не нужно; достаточно лишь

Помнить, что точки d и $-d$ — это не две разные, а одна и та же точка. Итак, векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r координатного пространства в точки проективной плоскости RP^2 .

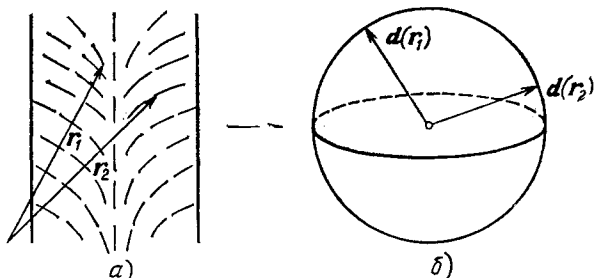


Рис. 5.

Посмотрим теперь, какое отношение имеет склейка к вопросу об устойчивости дисклинаций в нематике.

Пусть в поле директора $d(r)$ имеется дисклинационная линия L , т. е. линия, на которой поле $d(r)$ терпит разрыв (рис. 6, а). Окружим ее замкнутым контуром γ . Каждая точка r этого контура

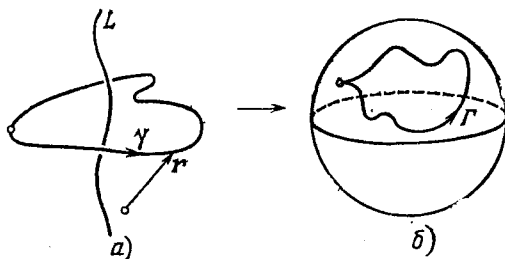


Рис. 6.

имеет своим образом точку $d(r)$ на поверхности RP^2 , а весь замкнутый контур γ отображается в замкнутый контур Γ на поверхности RP^2 (рис. 6, б). Очевидно, что любой непрерывной деформации поля $d(r)$ в окрестности контура γ соответствует деформация контура Γ на поверхности RP^2 . В частности, деформация распределения $d(r)$, названная вытеканием линии в третье измерение (см. рис. 3), сопровождается стягиванием контура Γ на поверхности RP^2 в точку (рис. 7, а — е).

Понятно, что и в общем случае устранимым (неустойчивым) дисклинациям на поверхности RP^2 соответствуют контуры Γ , стягиваемые в точку. Будем обозначать класс таких контуров, а вместе с ним и дисклинаций, символом Γ_0 . Легко сообразить, что для пло-

ских полей к этому классу относятся все дисклинации с целым индексом γ векторного поля $d(r)$ (см. рис. 2, а — е). Все контуры класса Γ_0 , а значит, и все векторные поля дисклинаций этого класса можно непрерывно продеформировать друг в друга.

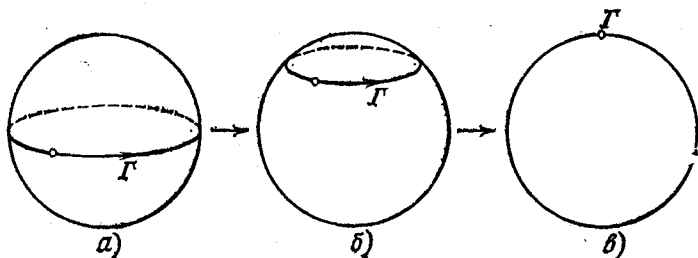


Рис. 7.

С другой стороны, в нематиках имеются дисклинации, изображенные, например, на рис. 2, е, д, такие, что образами окружающих их контуров γ являются контуры типа $\Gamma_{1/2}$, соединяющие

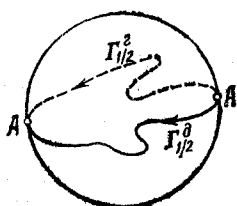


Рис. 8.

диаметрально противоположные точки сферы (рис. 8). Мы знаем, что такие точки эквивалентны, а значит, контуры $\Gamma_{1/2}$ замкнуты! В отличие от контуров типа Γ_0 , контуры $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку по поверхности RP^2 . В этом отношении контуры типа $\Gamma_{1/2}$ напоминают контуры, обходящие дырку у бублика. Это легко себе представить, деформируя и склеивая сферу только в двух диаметрально противоположных точках А — начала и конца контура $\Gamma_{1/2}$.

Контуры типа $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку, зато их можно продеформировать друг в друга. Дисклинации, изображенные на рис. 2, е, д, устойчивы. Соответствующие им распределения невозможно превратить в однородные никакой непрерывной деформацией поля $d(r)$, хотя легко преобразовать друг в друга. Полезно самостоятельно продеформировать поле рисунка 2, е в поле рисунка 2, д, для чего предварительно сделать деформацию соответствующих контуров $\Gamma_{1/2}$ на RP^2 , изображенных на рис. 8.

Подчеркнем, что существование замкнутых контуров $\Gamma_{1/2}$, не стягиваемых в точку, а значит, и топологически устойчивых дисклинаций, является исключительно следствием эквивалентности диаметрально противоположных точек d и $-d$. На обычной сфере без всяких склеек любой замкнутый контур можно стянуть в точку и, следовательно, если бы состояния d и $-d$ были отличимы, то в таком веществе (изотропный ферромагнетик) вообще не было бы

устойчивых особых линий. Сфера и RP^2 локально (в окрестности каждой точки) эквивалентны, но глобально (в целом) имеют разные топологические свойства!

Итак, с точки зрения топологии в нематическом жидком кристалле имеется всего два типа линий дисклинаций: характеризуе-

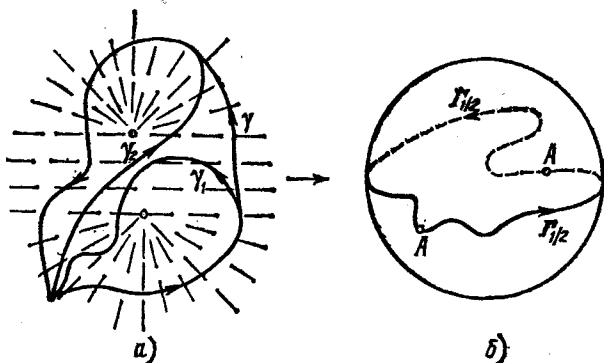


Рис. 9.

мых на проективной плоскости замкнутыми контурами типа Γ_0 , стягиваемыми по ней в точку, либо замкнутыми контурами типа $\Gamma_{1/2}$, не стягиваемыми по ней в точку. Устойчивые линии типа $\Gamma_{1/2}$ не могут заканчиваться внутри объема с нематиком. Они либо замкнуты, либо выходят на поверхность. Докажем это утверждение от противоположного. Если бы они могли заканчиваться в объеме, то тогда с них можно было бы снять и стянуть в точку охватывающий их контур γ , а значит, стянулся бы в точку и его образ $\Gamma_{1/2}$ на проективной плоскости, что невозможно для контуров типа $\Gamma_{1/2}$. Напротив, неустойчивым линиям топология не запрещает заканчиваться внутри объема, однако отрезкам особых линий энергетически выгодно сокращать свою длину и они или исчезают совсем, или, если они одним концом прикреплены к поверхности, сжимаясь, превращаются в поверхностную особую точку.

Линии дисклинаций взаимодействуют между собой, и в случае притяжения две линии могут, например, сливаться в одну. Каков будет результат слияния? Получится ли из двух устойчивых вновь устойчивая линия или она будет неустойчивой и исчезнет, т. е. исходные линии аннигилируют? Топология дает ответ и на этот вопрос. На проективной плоскости образом контура $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (см. рис. 9, а), охватывающего сразу две линии типа $\Gamma_{1/2}$, будет контур $\Gamma_{1/2}$, проходимый дважды, что обозначается как произведение $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2}$. Как явствует из рис. 9, б, такой контур эквивалентен контуру Γ_0 и, следовательно, стягиваем в точку. Это означает,

что две устойчивые дисклинации, сливаясь, превращаются в неустойчивую дисклинацию типа Γ_0 , т. е. аннигилируют. В сказанном можно убедиться и непосредственно, деформируя распределение $\mathbf{d}(r)$, изображенное на рис. 9, а, в распределение рис. 2, а. Напротив, слияние устойчивой и неустойчивой дисклинаций всегда дает устойчивую, что можно коротко записать как $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_0 \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0$.

Сформулированные законы умножения означают, что множество классов контуров на RP^2 , состоящее из двух элементов Γ_0 и $\Gamma_{1/2}$, образует группу $\pi_1(RP^2)$, называемую *фундаментальной группой* проективной плоскости. Умножение элементов в этой группе можно заменить эквивалентным ему сложением индексов у контуров, при условии, что все целые числа эквивалентны нулю:

$$\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0; \quad \Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

4. Особые точки

Кроме особых линий в поле вектора $\mathbf{d}(r)$, в объеме, занимаемом нематиком, возможны особые точки — точки разрыва в поле $\mathbf{d}(r)$. Простейшим примером такой точки является точка, вокруг которой направления вектора \mathbf{d} совпадают с направлениями радиус-вектора, отложенного из этой точки $\mathbf{d}(r) = \frac{r}{|r|}$. Векторы $\mathbf{d}(r)$, торчащие во все стороны вокруг особой точки, напоминают иголки свернувшегося в клубок ежа, поэтому эта особая точка получила название *еж*. Устойчив ли еж? Иными словами, можно ли путем непрерывной деформации поля $\mathbf{d}(r)$ устранить эту особую точку и превратить поле $\mathbf{d}(r)$ в однородное? Для ответа на этот вопрос окружим особую точку сферой σ . образом сферы σ на RP^2 будет вся поверхность RP^2 , проходимая один раз. Таким образом, поле $\mathbf{d}(r)$ вокруг ежа осуществляет *отображение степени единица* сферы σ на RP^2 . Будем непрерывно деформировать поле $\mathbf{d}(r)$ — «причесывать» ежа. При этом образ сферы σ , который можно представлять как замкнутую пленку (т. е. пленку без края), обтягивающую RP^2 , будет также деформироваться и образовывать складки. Но стянуть эту пленку в точку, оставаясь на RP^2 , нам не удастся, а значит, и не удастся устранить особую точку в поле $\mathbf{d}(r)$. Степень отображения — топологический инвариант.

В общем случае, для исследования произвольной особой точки в поле $\mathbf{d}(r)$ на устойчивость, надо окружить ее сферой σ и проследить за ее образом на RP^2 . Всем устойчивым особым точкам соответствуют пленки — образы σ на RP^2 , целое число раз окутывающие проективную плоскость. Неустойчивым особым точкам соответствуют замкнутые пленки, стягиваемые по RP^2 в точку со

степенью отображения $N = 0$. Устойчивые особые точки, как и устойчивые особые линии, можно устранить только путем создания разрывов в поле $d(r)$, что требует преодоления колоссального энергетического барьера. Мы рассматривали такой процесс в случае особой линии (см. рис. 4). В отличие от особой линии, для устранения устойчивой особой точки необходимо создать разрыв в поле $d(r)$ на выходящей из нее линии.

Степень отображения — целочисленный индекс. Возникает вопрос: чем отличаются ежи, имеющие степень разного знака, например, ежи с $N = 1$ и $N = -1$. Они должны отличаться направлением иголок, т. е. разной ориентацией пленок — образов сферы σ . В первом случае иголки торчат наружу, а во втором — внутрь. Но мы знаем, что противоположные направления $d(r)$

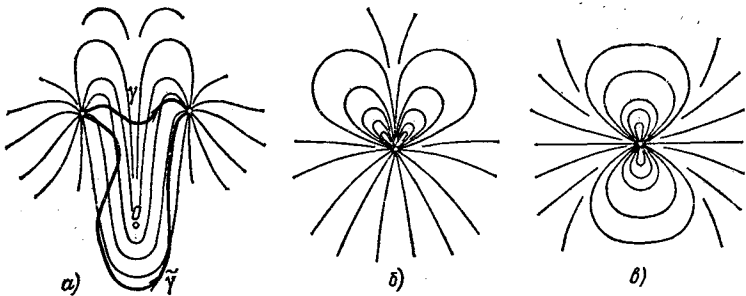


Рис. 10.

неотличимы. Поэтому ежи с $N = 1$ и $N = -1$ — это одна и та же особая точка с $|N| = 1$. С другой стороны, слияние двух ежей, казалось бы, должно приводить к сложению индексов, и значит, если мы сложим два ежа с индексами $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$, мы можем получить как ежа с индексом 2, так и ежа с индексом 0, т. е. устранимую (неустойчивую) особую точку. Такое поведение кажется невероятным. А что же будет на самом деле?

Реальный процесс слияния ежей дает результат, зависящий от пути слияния! Этот факт следует из нетривиальности фундаментальной группы нематического жидкого кристалла $\pi_1(RP^2)$. В топологии его называют *влиянием* π_1 . Например, слияние особых точек с $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$ может происходить вдоль путей γ и $\tilde{\gamma}$, проходящих по разные стороны от линии устойчивой дисклинации. На рис. 10, а тонкими линиями показаны линии поля $d(r)$, линия дисклинации перпендикулярна плоскости рисунка и обозначена буквой O . Очевидно, слияние вдоль пути γ дает точечную особенность с $|N| = 2$, изображенную на рис. 10, б. Обратим внимание, что распределение поля на рис. 10, б не имеет оси сим-

метрии, а только плоскость симметрии, перпендикулярную плоскости рисунка. Слияние ежей вдоль пути γ дает точечную особенность с $|N| = 0$, которая показана на рис. 10, *в*. Здесь распределение $d(r)$ аксиально симметрично относительно горизонтальной оси, проходящей в плоскости рисунка.

Итак, наличие дисклинации в поле $d(r)$ приводит к неоднозначности результата слияния ежей. Разумеется, неоднозначность имеет место только в присутствии топологически устойчивых дисклинаций, соответствующих нетривиальным элементам фундаментальной группы.

5. Что и где еще?

Мы видели, что топологические свойства замкнутых контуров и пленок на проективной плоскости дают возможность проанализировать ряд вопросов, связанных с устойчивостью и слиянием дисклинаций и особых точек в нематическом жидком кристалле. Кроме особенностей поля $d(r)$, топология дает возможность классифицировать устойчивые неособые конфигурации поля $d(r)$ — доменные стенки и солитоны, возникающие в поле $d(r)$ в присутствии внешних электрических и магнитных полей.

Нематик не одинок. Существует целый обширный класс упорядоченных веществ: обычные и жидкие кристаллы всех типов, ферро- и антиферромагнетики, сегнетоэлектрики, сверхпроводники и сверхтекучие жидкости, при изучении которых оказываются полезными топологические методы. Поведение особенностей в нематике определялось топологическими свойствами области изменения директора d — проективной плоскости RP^2 . В других упорядоченных веществах реализуются другие типы полей: поля векторов, поля матриц и, соответственно, другие области D изменения параметра порядка. Фундаментальная группа π_1 , вообще говоря, некоммутативна. Из существующих в природе веществ некоммутативную фундаментальную группу $\pi_1(D)$ имеет лишь двухосный*) нематический жидкий кристалл. Некоммутативность $\pi_1(D)$ приводит к ряду красивых, но пока еще экспериментально не обнаруженных следствий.

Наиболее впечатляющие приложения топологии появились в связи с открытием в 1972 г. сверхтекучих фаз легкого изотопа гелия — ^3He . Оказалось, что сами сверхтекучие свойства этих фаз в значительной мере диктуются топологией. Об этих свойствах, а также многих других приложениях топологии в физике можно прочесть в брошюре Г. Е. Воловика и В. П. Минеева «Физика и топология», выпущенной в 1980 г. издательством «Знание».

*) Нематический жидкий кристалл, с которым имели дело мы, — одноосный нематический жидкий кристалл.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора	3
Предисловие авторов	5
Часть первая. ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ	7
1. Идея непрерывности	7
2. Чем занимается топология?	11
3. Простейшие топологические инварианты	15
4. Эйлерова характеристика графа	18
5. Индекс пересечения	22
6. Теорема Жордана	27
7. Что такое линия?	30
8. Кривая Пеано.	37
Часть вторая. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ	41
9. Теорема Эйлера	41
10. Поверхности	43
11. Эйлерова характеристика поверхности	49
12. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей	53
13. Классификация замкнутых неориентируемых поверхностей	60
14. Векторные поля на поверхностях	68
15. Проблема четырех красок	74
16. Раскрашивание карт на поверхностях	76
17. «Дикая сфера»	81
18. Узлы	87
19. Коэффициент зацепления	92
Часть третья. ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ	98
20. Периоды многозначных функций	98
21. Фундаментальная группа	101
22. Клеточные разбиения и полиэдры	106
23. Накрытия	110
24. Степень отображения и основная теорема алгебры	115
25. Группа узла	119
26. Циклы и гомологии	123
27. Топологическое произведение	134
28. Расслоения	137
29. Теория Морса	142
Приложение. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ (В. П. Минеев)	148