3. Простейшие топологические инварианты

Выше (пример 4) мы говорили, что поверхность шара (т. е. сфера) не гомеоморфна тору, и вряд ли у читателя возникло сомнение в этом. Но как доказать, что две фигуры не являются гомеоморфными? Ведь из того, что мы не сумели найти гомеоморфного отображения одной фигуры на другую, не вытекает еще с достоверностью, что такого гомеоморфного отображения не существует.

Для доказательства того, что две фигуры не гомеоморфны друг другу, пользуются *топологическими инвариантами*. Пусть, например, с помощью некоторого правила каждой фигуре ставится в соответствие определенное число, причем так, что числа, соответствующие двум гомеоморфным фигурам, всегда оказываются равными. Тогда это число выражает некоторое свойство фигуры, сохраняющееся при гомеоморфных отображениях, т. е. являющееся топологическим инвариантом. Если теперь две фигуры A и B таковы, что соответствующие им числа оказались различными, то эти фигуры не могут быть гомеоморфными.

Пример 7. Буква Ы представляет собой фигуру, состоящую из двух «кусков», из двух не связанных между собой частей. Остальные буквы русского алфавита, кроме Й, Ё, состоят из одного связного куска. Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом; если две фигуры гомеоморфны, то обе они состоят из одинакового числа компонент. Поэтому буква Ы не гомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т. д.

Пример 8. На фигуре восьмерки (см. рис. 10) имеется такая точка x, что после удаления из восьмерки точки x вместе с близлежащими точками (рис. 11) мы получаем

Рис. 11.

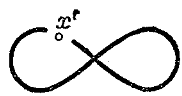

Рис. 12.

несвязную фигуру (содержащую более одной компоненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей точкой* фигуры. Никакая отличная от x точка x' восьмерки не является разбивающей (рис. 12).

Понятия «разбивающая точка», «неразбивающая точка» топологически инвариантны: если x есть разбивающая точка фигуры A, а $f\colon A \to B$ — гомеоморфное отображение, то $f(x)$ есть разбивающая точка фигуры B. Поэтому число разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек — также топологический инвариант.

Задачи

16. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ь попарно не гомеоморфны.

17. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

Пример 9. Пусть A — некоторая фигура, составленная из конечного числа дуг, и x — ее точка. Число дуг фигуры A, сходящихся в точке x, называется *индексом* точки x в фигуре A. В фигуре буквы Ж (рис. 13) точка a имеет индекс 1, точка b имеет индекс 2, точка c — индекс 3, а точка d — индекс 4. Число точек индекса 1, содержащихся в фигуре A, число точек индекса 3, индекса 4 и т. д.— все это различные топологические инварианты фигуры A.

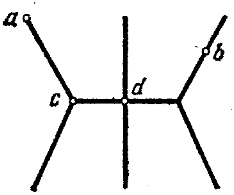

Рис. 13.

Задачи

18. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны.

19. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

Фигуры, состоящие из конечного числа дуг, называют в топологии *конечными графами*. В конечном графе имеется конечное число *вершин* и некоторые из этих точек соединяются непересекающимися дугами (*ребрами* графа); при этом две вершины графа можно соединять несколькими ребрами и, кроме того, допускаются замкнутые ребра («петли»), которые начинаются и кончаются в одной и той же вершине.

Задачи

20. Пусть G — конечный граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k. Докажите, что число ребер графа G равно $^1/_2(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \ldots)$.

21. Докажите, что во всяком конечном графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Пример 10. Граф называется *уникурсальным*, если его можно «нарисовать одним росчерком», т. е. пройти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологически инвариантным. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса точки (см. задачу 24).

Задачи

22. Докажите, что если каждая вершина конечного графа имеет индекс, не меньший двух, то этот граф содержит линию, гомеоморфную окружности и составленную из ребер графа.

23. Докажите, что если все вершины конечного связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольно заданной его вершины и возвращаясь в ту же вершину.

24. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не более двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами тесно связана задача о кенигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кенигсберге (ныне Калининград областной) было 7 мостов (рис. 14) через реку Прегель. Вопрос состоит в том, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти

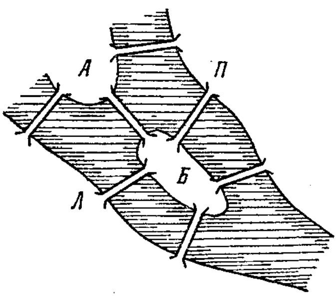

Рис. 14.

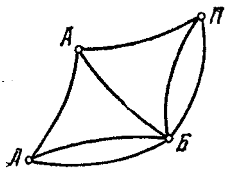

Рис. 15.

через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина *Л* обозначает левый берег, *П* — правый берег, *А* и *Б* острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 15). В этом графе все четыре вершины имеют н е ч е т н ы й индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута прогулки н е с у щ е с т в у е т.

Задачи

25. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рис. 14), мы получим схему города, в котором можно пройти через каждый мост точно по одному разу.

26. *Полным графом* называется конечный граф без петель, у которого любые две вершины соединены точно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?