4. Эйлерова характеристика графа

Всякий граф можно постепенно «построить», добавляя одно ребро за другим. Например, можно в требуемом графе перенумеровать заранее все ребра, а затем вычерчивать последовательно первое ребро, второе, третье и т. д.

Пример 11. На рис. 16 показан граф, который мы хотим построить, и выбрана нумерация его ребер (некоторые ребра прерваны, чтобы показать наглядно их возможное расположение в пространстве).

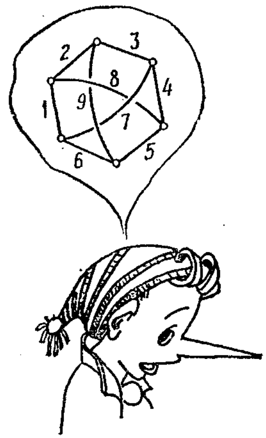

Рис. 16.

Нумерация ребер на рис. 16 выбрана так, что при последовательном вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас получился бы несвязный граф, содержащий три отдельно взятых ребра, и лишь потом, при вычерчивании новых ребер, мы получили бы связный граф. Естественно возникает вопрос: во всяком ли связном графе существует такая нумерация ребер, что при последовательном вычерчивании графа (в соответствии с этой нумерацией) все время получаются связные графы?

Ответ на этот вопрос утвердителен (см. задачу 28). Иначе говоря, *всякий связный граф может быть получен следующим образом: мы берем одно ребро, затем присоединяем к нему еще одно ребро так, чтобы снова получился связный граф, затем присоединяем еще одно ребро (так, чтобы снова получился связный граф)* и т. д. Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

27. Докажите, что любой связный граф можно вычертить «одним росчерком», если разрешить проходить каждое ребро точно два раза.

28. Выведите из предыдущей задачи доказательство теоремы о вычерчивании связного графа.

29. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G *простой цепочкой ребер*, т. е. такой, что объединение ребер этой цепочки гомеоморфно отрезку.

Указание: если цепочка ребер, соединяющая a и b, дважды проходит через некоторую вершину c, то она содержит «замкнутую цепочку» (начинающуюся и кончающуюся в c), которую можно удалить.

30. Докажите, что если любые две вершины графа G можно соединить не менее чем двумя различными простыми цепочками, то граф G не имеет вершин индекса 1. Верна ли обратная теорема?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис. 17). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется *деревом*

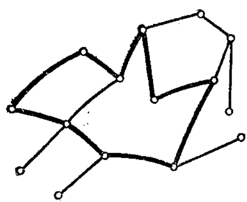

Рис. 17.

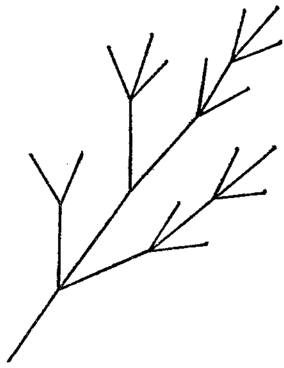

Рис. 18.

(рис. 18). Мы докажем, что *для любого дерева, имеющего* В *вершин и* Р *ребер, справедливо соотношение*

$$\text{В} - \text{Р} = 1. \tag{4}$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер Р. При Р $= 1$ (дерево имеет одно ребро и две вершины) соотношение (4) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (4) уже доказано, и пусть G — дерево, имеющее $n + 1$ ребро. Так как граф G связен, то его можно получить из некоторого связного графа G' добавлением одного ребра r (это вытекает из «теоремы о вычерчивании связного графа»). Граф G' содержит n ребер и тоже не содержит контуров, т. е. является деревом. По предположению индукции для дерева G' соотношение (4) справедливо, и потому в G' имеется $n+1$ вершина. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (в противном случае, взяв в G' простую цепочку, соединяющую вершины a и b, и добавив к этой цепочке ребро r, мы получили бы контур в графе G; рис. 19). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется одно новое ребро и одна новая вершина (рис. 20). Иначе говоря, граф G имеет $n+2$ вершины

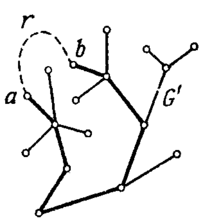

Рис. 19.

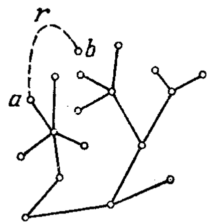

Рис. 20.

и $n+1$ ребро, и потому соотношение (4) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (4) для любого дерева.

Разность В — Р, где В — число вершин, а Р — число ребер графа G, называется *эйлеровой характеристикой* этого графа и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, *эйлерова характеристика любого дерева равна* 1.

Задачи

31. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Докажите, что если G — лес, то число деревьев, которые «растут» в нем (т. е. число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

32. Докажите, что если G — дерево, то каждые две его вершины соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Пусть теперь G — связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 — какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 21). Удалив из G ребро r_1, мы получим связный граф G' (поскольку концы выброшенного ребра r_1 соединены в G' простой цепочкой — оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' — те же, что и у G. Если G' еще не является деревом, т. е. в G' также есть контур (рис. 22), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G, и т. д. После выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^*, содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, т. е. являющийся деревом. Оно называется *максимальным деревом* графа G, а ребра $r_1, r_2, \ldots, r_k$ называются *перемычками.*

Если В — число вершин графа G, то максимальное дерево G^* имеет те же В вершин. Согласно (4) G^* имеет В — 1 ребро, и потому число ребер графа G равно В — — 1 + k (чтобы из G^* получить G, надо «возвратить» k

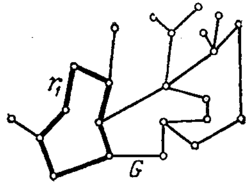

Рис. 21.

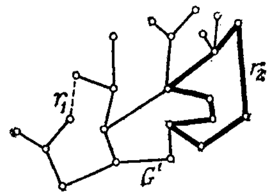

Рис. 22.

выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G) = \text{В} - (\text{В} - 1 + k) = 1 - k. \qquad (5)$$

Так как $k \geqslant 1$, то $\chi(G) \leqslant 0$. Таким образом, *для любого связного графа G справедливо соотношение $\chi(G) \leqslant 1$; равенство достигается в том и только в том случае, если G — дерево*

Далее, согласно (5) число перемычек $k = 1 - \chi(G)$. Иначе говоря, *для получения графа G надо к его максимальному дереву добавить $1 - \chi(G)$ ребер-перемычек, каждое из которых соединяет две (возможно, совпадающие) вершины максимального дерева.*

Задачи

33. Если связный граф G получается из некоторого дерева добавлением нескольких замкнутых ребер («петель»), то в G имеется единственное максимальное дерево. Верно ли обратное?

34. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G) \leqslant l$. В каком случае достигается равенство?

35. Будем говорить, что в графе G задана *система токов*, если каждому ребру сопоставлено направление и неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа*: для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если G — дерево, то в нем существует только тривиальная система токов (все токи равны нулю).

36. Пусть G — связный граф, G^* — его максимальное дерево, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — перемычки. Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах $r_1, r_2, \ldots, r_k$, то их можно однозначно

дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G.

Указание. Для каждой перемычки r_1 существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке r_i, а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G. Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^*.