5. Индекс пересечения

В следующих двух примерах рассматриваются графы, не вложимые в плоскость.

Пример 12 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ (домики) и $К_1$, $К_2$, $К_3$ (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу, так чтобы никакие две тропинки не пересекались? Ответ отрицательный: если мы проведем все тропинки, кроме одной (рис. 23), то для последней

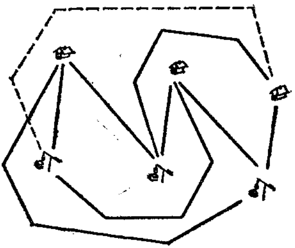

Рис. 23.

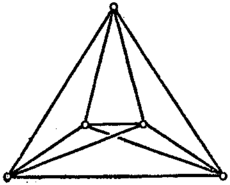

Рис. 24.

тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом, граф P_1, изображенный на рис. 23, не вложи́м в плоскость.

Пример 13. Обозначим через P_2 полный граф с пятью вершинами. На рис. 24 одно ребро прервано: для него «нет места» на плоскости. Таким образом, граф P_2 также не вложи́м в плоскость.

Интересно отметить, что построенные графы P_1, P_2 являются «эталонами» графов, не вложимых в плоскость: *если граф не вложи́м в плоскость, то он обязательно содержит граф, гомеоморфный* P_1 или P_2. Это было доказано польским математиком К. Куратовским

Задачи

37. Докажите, что граф, рассмотренный в примере 11 (рис. 16), не вложи́м в плоскость.

38. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали *) правильного n-угольника. Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.

39. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали *) правильного $2n$-угольника. Докажите, что при $n \geqslant 3$ этот граф не вложи́м в плоскость, но его можно расположить на торе.

40. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали *) правильного $(2n+1)$-угольника. Докажите, что при $n \geqslant 2$ этот граф не вложи́м в плоскость. Можно ли его расположить на торе?

Рассуждения, приведенные в примерах 12 и 13 («нет места» на плоскости), конечно, являются не доказательствами, а лишь пояснениями. Ниже мы изложим строгое доказательство того, что графы P_1, P_2 не вложи́мы в плоскость.

Пусть a, b — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концевых точек другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $J(a, b) = 1$, а если нет, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ назовем *индексом пересечения отрезков* a и b.

Конечное множество отрезков на плоскости будем называть *цепью*. Отрезки, составляющие цепь, назовем ее *звеньями*, а точки, являющиеся концами звеньев,— *вершинами*.

Пусть x и y — две такие цепи, что ни одна из них не содержит ни одной вершины другой цепи. Отрезки, составляющие цепь x, обозначим через $a_1, \ldots, a_m$, а отрезки, составляющие цепь y,— через $b_1, \ldots, b_n$. Если сумма $\sum\limits_{i,j} J(a_i, b_j)$ (т. е. сумма индексов пересечения каждого из отрезков $a_1, \ldots, a_m$ с каждым из отрезков $b_1, \ldots, b_n$) *четна*, то будем писать $J(x, y) = 0$, а если эта сумма *нечетна*, то $J(x, y) = 1$. Число $J(x, y)$ назовем *индексом пересечения* цепей x и y (точнее, индексом пересечения по модулю 2).

Цепь, в каждой вершине которой сходится четное число звеньев, будем называть *циклом* (по модулю два). Мы докажем, что *индекс пересечения двух циклов на плоскости всегда равен нулю.*

В самом деле, так как каждая вершина цикла имеет индекс, не меньший двух, то этот цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности (см. задачу 17 на с. 22). Если

*) Слегка приподнятые над плоскостью, чтобы они попарно не пересекались.

из цикла выбросить эту замкнутую ломаную, то останется снова цикл (каждая вершина имеет четный индекс). В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т. д. Итак, *каждый цикл можно представить как объединение конечного числа ломаных, гомеоморфных окружности (причем эти ломаные попарно не имеют общих отрезков).*

Поэтому для доказательства того, что индекс пересечения двух циклов x, y на плоскости всегда равен нулю, достаточно установить это в случае, когда каждый из циклов x, y представляет собой ломаную, гомеоморфную окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y (что не изменит их индекс пересечения), мы можем добиться того, чтобы звенья, составляющие циклы x и y, были попарно не параллельными. Выберем теперь прямую l, не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y.

Будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис. 25). Индекс пересечения $J(x, y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины одного из циклов x, y попадают на стороны другого

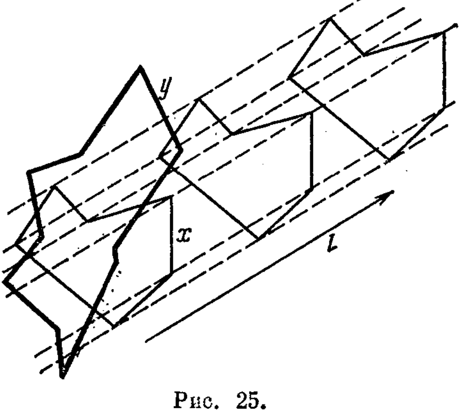

Рис. 25.

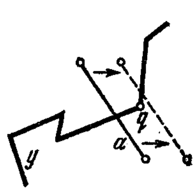

Рис. 26.

(вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако в момент, когда некоторое звено a цикла x проходит через вершину q цикла y, число точек пересечения не меняет своей четности (рис. 26—28). То же происходит и при прохождении вершин цикла x через стороны цикла y. Поэтому индекс пересечения $J(x, y)$ не меняется. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он не имеет общих точек с y (рис. 25), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $J(x, y) = 0$.

Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_1 (пример 12), не вложим в плоскость. Две тропинки, ведущие от разных домиков к разным колодцам, условимся называть *несмежными*. Проведем (в виде ломаных линий) все требуемые тропинки (возможно, с пересечениями) и обозначим через I число точек пересечения по всем парам несмежных тропинок. Мы покажем, что *при любом способе проведения тропинок число I нечетно.*

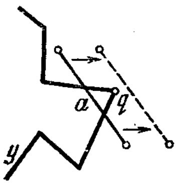

Рис. 27.

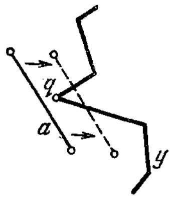

Рис. 28.

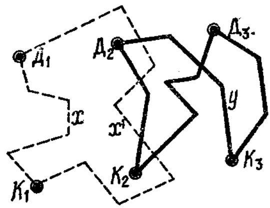

Рис. 29.

Предположим, что мы меняем положение одной тропинки, скажем, тропинки $Д_1К_1$. Первоначальное ее положение обозначим через x, а новое — через x' (рис. 29). Несмежными с $Д_1К_1$ являются четыре тропинки, соединяющие два оставшихся домика $Д_2$, $Д_3$ с двумя оставшимися колодцами $К_2, К_3$. Они образуют цикл $Д_2К_2Д_3К_3Д_2$, который мы обозначим через y. Ломаные x и x', вместе взятые, также образуют цикл. Так как индекс пересечения любых двух циклов равен нулю, то $J(x, y) = J(x', y)$. Иначе говоря, число точек пересечения тропинки x с циклом y (т. е. со всеми несмежными ей тропинками) имеет ту же четность, что и число точек пересечения тропинки x' с циклом y. Таким образом, при замене тропинки x тропинкой x' число I не меняет своей четности.

Но тогда ясно, что *для любых двух расположений тропинок на плоскости число I имеет одну и ту же четность.* Действительно, последовательно заменяя сначала одну тропинку первого расположения соответствующей тропинкой второго расположения, затем еще одну и т. д., мы постепенно заменим первое расположение тропинок вторым, а четность числа I, в силу доказанного, меняться не будет.

На рис. 23 имеется только одна точка пересечения тропинок, а потому *для любого расположения тропинок число I нечетно*. Следовательно, провести все тропинки без пересечений (т. е. так, чтобы было $I = 0$) невозможно и потому граф P_1 не вложи́м в плоскость.

Задачи

41. Докажите, что граф P_2, рассмотренный в примере 13 (с. 22), не вложи́м в плоскость.

42. Докажите, что на сфере (как и на плоскости) индекс пересечения любых двух циклов равен нулю. Покажите, что на торе существуют два цикла, индекс пересечения которых равен 1.

Пусть теперь a и b — два направленных отрезка, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если, идя по направлению первого отрезка a, мы увидим, что второй отрезок b пересекает его справа налево, то будем писать $J(a, b) = 1$; если слева направо, то $J(a, b) = -1$; наконец, если a и b не пересекаются, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ будем называть индексом пересечения направленных отрезков a и b.

Цепью (точнее, «целочисленной цепью» — в отличие от цепей по модулю 2, рассматривавшихся ранее) будем теперь называть конечное множество направленных отрезков на плоскости. *Индекс пересечения целочисленных цепей* x, y (рассматриваемых в определенном порядке: x — первая цепь; y — вторая) определяется, как и прежде:

$$J(x, y) = \sum_{i, j} J(a_i, b_j),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — направленные отрезки, составляющие цепь x, а $b_1, \ldots, b_n$ — направленные отрезки, составляющие цепь y.

Наконец, цепь условимся называть *циклом* (точнее, целочисленным циклом), если для каждой вершины число входящих в нее направленных отрезков равно числу исходящих.

Задачи

43. *Направленным контуром* условимся называть замкнутую ломаную, гомеоморфную окружности, на звеньях которой отмечено стрелками некоторое направление обхода (так, что в каждой вершине имеется одно входящее звено и одно исходящее).

Направленный контур является циклом. Докажите, что всякий цикл (целочисленный) можно представить как объединение конечного числа направленных контуров, которые попарно не имеют общих звеньев.

44. Докажите, что индекс пересечения любых двух целочисленных циклов равен нулю.

45. На рис. 30 цикл x состоит из двух отдельных направленных контуров. Докажите, что точка a в том и только в том случае принадлежит внешней области кольца, если для любой направленной ломаной y, идущей от o к a, выполнено условие $J(x, y) = 2$. В каком случае точка a лежит внутри заштрихованной кольцевой области?

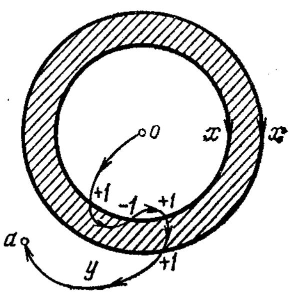

Рис. 30.