6. Теорема Жордана

Выше (см. рис. 25—28) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель готов предложить более простое доказательство: в каждой точке пересечения замкнутая ломаная x либо входит во внутреннюю область замкнутой ломаной y, либо выходит из внутренней области во внешнюю; так как число точек входа равно числу точек выхода (поскольку они чередуются), то общее число точек пересечения четно.

Однако это доказательство можно признать корректным, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выяснению его и посвящен этот пункт.

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется *простой замкнутой линией*. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Возьмем две точки, p и q, не лежащие на простой замкнутой линии l. Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающей l, то считают, что точки p и q *лежат в одной и той же области* относительно линии l. Если же любая ломаная, соединяющая p и q, пересекает l, то считают, что p и q лежат в *разных* областях. Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости две области. Кажущаяся «очевидность» теоремы Жордана объясняется лишь тем, что мы имеем в виду очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т. п.).

Пример 14. На рис. 31 изображена простая замкнутая ломаная. Однако вовсе не «очевидно», что она разрезает плоскость на д в е области; не сразу можно понять, в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a, b, c, d.

Приведем доказательство теоремы Жордана. При этом ограничимся случаем, когда l — не произвольная простая

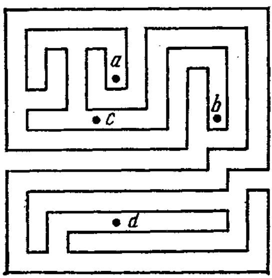

Рис. 31.

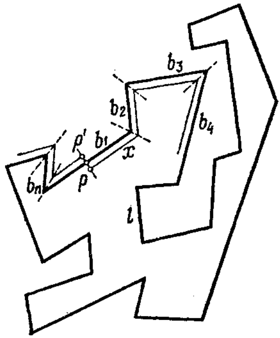

Рис. 32.

замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая л о м а н а я.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — последовательные звенья ломаной l. Возьмем точки p, p', симметричные относительно звена b_1. Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1, до точки пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1 и b_2 (рис. 32). Из этой точки проведем отрезок, параллельный b_2, до пересечения с биссектрисой угла между b_2 и b_3 и т. д. В результате мы получим ломаную x, звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l. Если при этом расстояние $|pp'|$ достаточно мало́, то линия x не пересекает линии l и, обойдя вокруг нее, должна вернуться либо в точку p, либо в p'. Однако в точку p' ломаная x прийти н е м о ж е т: если бы она соединяла точки p и p', то, присоединив к x отрезок pp', мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в е д и н с т в е н н о й точке, т. е. индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой з а м к н у т у ю ломаную, один раз обходящую ломанную l. Аналогично получается ломаная x', выходящая из p', один раз обходящая l и возвращающаяся в p'.

Пусть теперь c — произвольная точка, не лежащая на линии l. Тогда ее можно соединить, не пересекая l, либо с p, либо с p': мы можем провести из точки c луч, пересекающий линии x, x', и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x, x', а затем по этой линии дойти до точки p или p'.

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y, z, не пересекающие l и оканчивающиеся в p или p', то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы они оканчивались в разных точках (рис. 33), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равен 1, что невозможно.

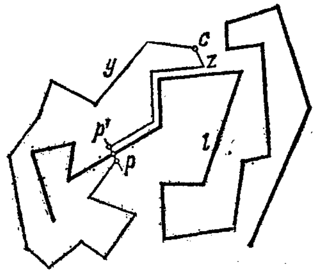

Рис. 33.

Обозначим теперь через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p, а через V — множество точек, которые можно, не пересекая l, соединить с p'. Тогда U, V и будут теми двумя областями, на которые, как утверждает теорема Жордана, линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки c_1, c_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1, y_2, не пересекающие l, которые соединяют c_1, c_2 с точкой p. Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую c_1 и c_2 и не пересекающую l. Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l. Если же точки c_1, c_2 принадлежат различным областям, то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1).

Заметим, что все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l. Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l, — неограниченная, а другая — ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную — *внутренней*.

46. Если ломаная l сложная (см. рис. 31), то трудно определить «на глаз», во внутренней или внешней области лежит точка c (т. е. можно ли, отправляясь из c, выйти из «лабиринта», образованного линией l). Докажите, что если луч, исходящий из точки c и не проходящий через вершины ломаной l, пересекает l в четном числе точек, то c лежит во внешней области, а если в нечетном, то во внутренней.

47. Докажите, что всякая простая замкнутая линия на сфере разбивает сферу на две области.

48. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q. Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.

Укажем (без доказательства), что *любые две простые замкнутые линии l_1, l_2 на плоскости изотопны между собой*, т. е. существует гомеоморфное отображение плоскости на себя, которое переводит l_1 в l_2. Это предложение отличается от теоремы Жордана, оно утверждает нечто большее. В самом деле, пусть l_1 — окружность, а l_2 — произвольная простая замкнутая линия на плоскости. Гомеоморфное отображение плоскости на себя, переводящее l_1 в l_2, переводит внешнюю область окружности l_1 во внешнюю область линии l_2, а внутреннюю область окружности l_1 (т. е. открытый круг) — во внутреннюю область линии l_2. Таким образом, *объединение простой замкнутой линии l_2 и ее внутренней области гомеоморфно кругу*. Теорема Жордана об этом ничего не говорит, утверждая лишь существование двух областей, внутренней и внешней.