7. Что такое линия?

Евклид определяет линию как «длину без ширины». Это, конечно, не определение, а лишь наглядное описание линий. Следующий пример показывает, однако, что это описание вряд ли можно считать удачным.

Пример 15. Возьмем квадрат площади 1 (рис. 34, *а*) и выбросим из него крест (рис. 34, *б*), причем ширину полосок креста подберем так, чтобы площадь креста была равна 1/4. В каждом из оставшихся квадратов снова вырежем по кресту (рис. 34, *в*), причем так, чтобы сумма площадей крестов была равна 1/8. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь выбросим по кресту (рис. 34, *г*) так, чтобы сумма площадей выбрасываемых кусков была равна 1/16, и т. д. Обозначим через A «предельную фигуру», т. е. пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ $\ldots \cap A_n \cap \ldots$, где A_n — фигура, которая остается после проведения n этапов построения. Фигура A как бы «рассыпается» на отдельные точки (ибо остающиеся квадратики делаются все меньше) и тем не менее имеет положительную площадь. В самом деле, сначала мы выбро-

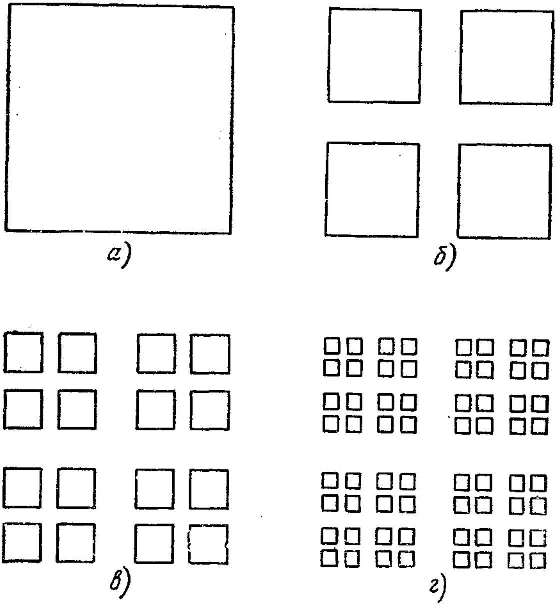

Рис. 34.

сили из квадрата 1/4 его площади, затем 1/8, затем 1/16 и т. д. В пределе у нас остается фигура A, имеющая площадь $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)$. Так как сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, записанной в скобках, равна 1/2, то площадь предельной фигуры A равна 1/2.

Построим теперь *простую дугу* (т. е. фигуру, гомеоморфную отрезку), которая проходит через все точки множества A. Для этого возьмем изогнутую полоску, содержащую четыре квадрата, полученных на первом этапе построения (рис. 35, *а*). Затем сделаем полоску более узкой и изогнутой, так что она будет содержать все квадраты, полученные на втором этапе (рис. 35, *б*), затем на третьем (рис. 35, *в*) и т. д.

После n этапов этого построения мы получаем полоску B_n, которая содержится в предыдущих полосках и содержит фигуру A_n (а следовательно, и фигуру A). Пересечение $B_1 \cap B_2 \cap \ldots$ этих полосок, т. е. их «предельную фигуру», обозначим через B; она также содержит A, и потому площадь фигуры B не меньше 1/2. Рис. 35 наглядно

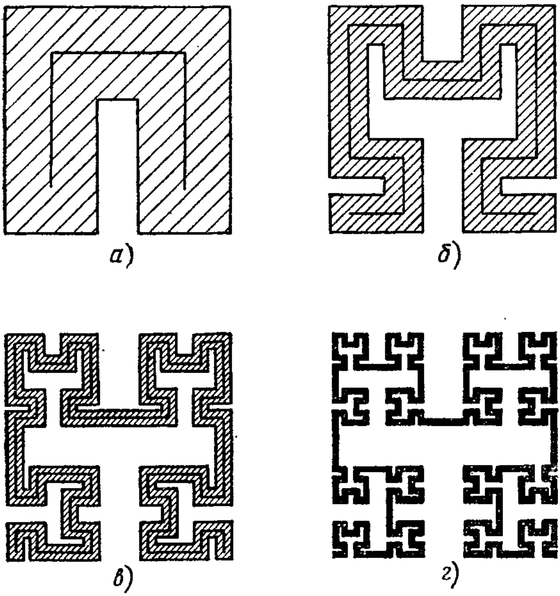

Рис. 35.

показывает, что B является чрезвычайно «извилистой» линией (простой дугой). Эта линия имеет положительную площадь, т. е. вряд ли может быть названа «длиной без ширины».

Евклид дает также описание линии как «границы поверхности». Однако и понятие «граница», как мы сейчас увидим, таит в себе много неожиданного. Мы привыкли считать, что к каждому участку линии плоскость примыкает «с двух сторон». Например, если l — простая замкнутая линия, то обе области, U и V, определяемые линией l, примыкают к ней на всем ее протяжении (т. е.

как угодно близко к любой точке $x \in l$ имеются и точки области U и точки области V).

Кажется «наглядно очевидным», что линия не может быть совместной границей более чем двух областей на плоскости, которые примыкают к этой линии на всем ее протяжении. Однако здесь интуиция нас обманывает.

Пример 16. Покажем, что на плоскости существует линия, являющаяся *совместной границей трех областей.* Такие линии обнаружил японский математик Вада.

Предположим, что имеется окруженная морем земля и на ней два озера: теплое и холодное. Для подведения воды от озер и моря к суше проводятся каналы. В первый день от теплого озера отводится канал (не сообщающийся с морской водой и водой холодного озера) так, чтобы не далее чем на расстоянии 1 от каждой точки суши была вода теплого озера (рис. 36). Во второй день канал отводится от холодного озера, причем он нигде не сообщается с морем, теплым озером и построенным на день раньше каналом, и работа продолжается до тех пор, пока от каждой точки оставшейся суши не далее чем на расстоянии 1 будет вода холодного озера. В третий день канал таким же порядком отводится от моря.

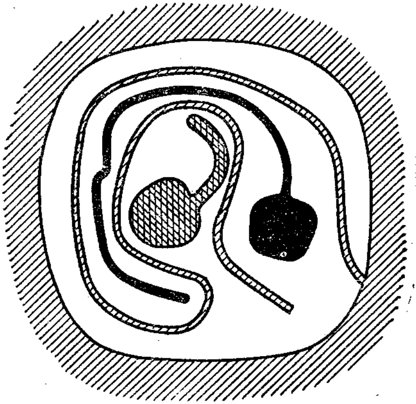

Рис. 36.

В следующие три дня каналы продолжаются далее, причем так, чтобы на расстоянии, меньшем 1/2, от каждой точки оставшейся суши была вода обоих озер и морская вода. В следующие за ними три дня густота сети каналов увеличивается, так что любая вода будет не далее чем на 1/4 от каждой точки оставшейся суши, и т. д. Заметим, что после каждого дня работы оставшаяся суша будет связным куском, так что мы можем покрывать ее на следующий день еще более плотной сетью каналов.

В пределе мы получим сеть теплой, холодной и морской вод, которые нигде вместе не сливаются. То, что останется от суши, будет уже «линией», причем как угодно близко от любой точки этой линии будет холодная, теплая и морская вода. Иначе говоря, на всем протяжении этой линии к ней будут «примыкать» три области: море с его каналами, холодное озеро с его каналами и теплое озеро с его каналами.

Евклид дает еще и третье описание линии: «поверхность имеет два измерения, линия имеет одно измерение, точка не имеет ни одного измерения». Определить, что такое размерность (число измерений) фигуры, пытались многие математики. Окончательное выяснение смысла этого понятия и создание теории размерности является заслугой замечательного советского математика П. С. Урысона, безвременно погибшего в возрасте 26 лет в 1924 году.

Говорят, что множество A, расположенное в фигуре X, *отделяет* точку a от точки b, если не существует в фигуре X связного множества, которое содержит точки a и b и не пересекается с A. Например, поверхность шара (сфера) отделяет в пространстве внутренние точки шара

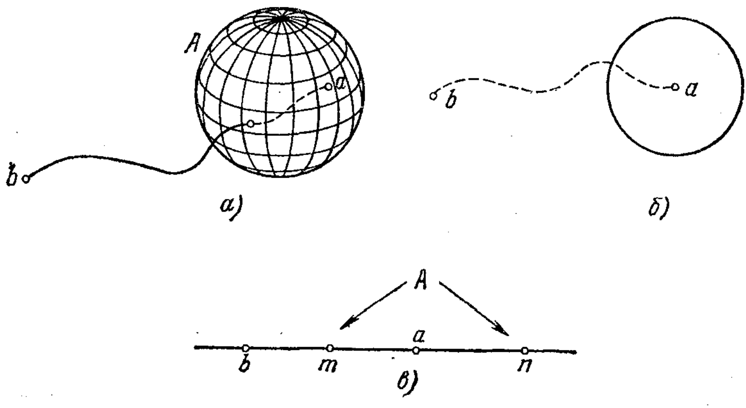

Рис. 37.

от внешних (рис. 37, a). Таким образом, в трехмерном пространстве отделение точек можно производить с помощью двумерных фигур. На плоскости (которая представляет собой двумерную фигуру) точку вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек отделить с помощью одномерной фигуры (т. е. линии, рис. 37, $б$). Наконец, на прямой (т. е. одномерной фигуре) точку a вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек прямой отделить с помощью фигуры A, состоящей из двух точек m, n (см рис. 37, *в*), т. е. с помощью **нульмерной** фигуры

Итак, в фигуре, имеющей n измерений (или, как гово рят, в *n-мерной* фигуре), отделение точки вместе с близ кими к ней точками от остальной части фигуры можн производить с помощью фигур, имеющих на одно измерение меньше, чем вся фигура. Возникает мысль дать определение нульмерных фигур, через них определить одномерные фигуры (т. е. линии), затем с помощью одномерных определить двумерные фигуры и т. д.

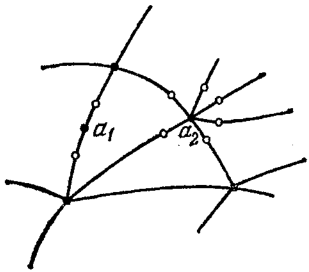

Рис. 38.

Будем говорить, что *фигура X нульмерна, если в ней не существует никакой связной фигуры, содержащей более одной точки.* Например, фигура, состоящая из конечного числа точек, нульмерна. Фигура A в примере 15 также нульмерна.

Если определено уже, какие фигуры считаются $(n-1)$-мерными, то *n-мерная фигура* определяется как фигура, не являющаяся $(n-1)$-мерной, в которой любую

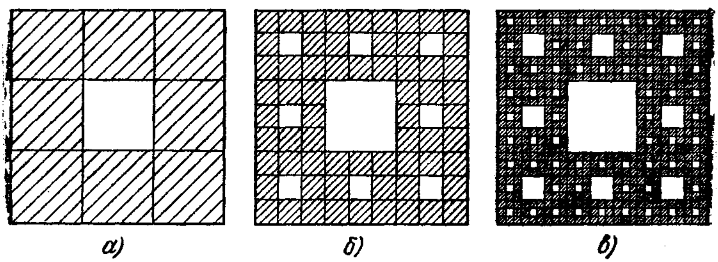

Рис. 39.

точку вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части фигуры с помощью множества размерности $n-1$ (или меньше). Это и есть урысоновское определение размерности.

Пример 17. Любой граф является одномерной фигурой, т. е. линией. Действительно, точку a вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части графа конечным (т. е. нульмерным) множеством: отделяющее множество содержит две точки, если a — внутренняя точка ребра (a_1 на рис. 38), и k точек, если a — вершина индекса k (a_2 на рис. 38).

Пример 18. Интересный пример линии был построен польским математиком Серпинским. Разделим квадрат на девять квадратов и выбросим средний из них (рис. 39, *а*). Каждый из восьми оставшихся квадратов снова разделим на девять квадратиков и выбросим средний (рис. 39, *б*). Затем так же поступим с каждым из оставшихся квадратиков (рис. 39, *в*) и т. д. В пределе мы получим некоторую одномерную фигуру C, т. е. линию («ковер Серпинского»).

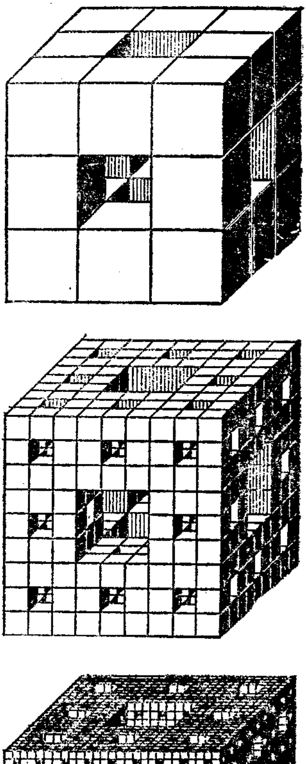

Рис. 40.

Фигура C является универсальной плоской линией: *если линия l вложима в плоскость, то она вложима в ковер Серпинского, т. е. существует линия $l' \subset C$, гомеоморфная l.* Ясно, что линии, не вложимые в плоскость, не могут быть вложены и в ковер Серпинского. Однако существует в пространстве линия (аналог ковра Серпинского, рис. 40), в которую, как доказал австрийский математик Менгер, *можно вложить любую линию*,

Задачи

49. Существует ли на плоскости линия, являющаяся совместной границей двадцати областей?

50. Докажите, что диагональ квадрата, в котором построен ковер Серпинского C, пересекает C по нульмерному множеству. Выведите отсюда, что ковер Серпинского является одномерной фигурой, т. е. линией.

51. Докажите, что свойство фигуры быть линией, является топологическим инвариантом.