## 8. Кривая Пеано

Часто дают еще одно наглядное описание: «линия есть след движущейся точки».

**Пример 19.** Пусть движущаяся точка пробегает фигуру буквы $\Phi$ двумя способами, показанными на рис. 41 (сплошной линией указан путь, пройденный в некоторый момент, а штриховой — дальнейшее движение). В обоих случаях точка пробегает одно и то же множество, т. е. «след» движущейся точки одинаков, но п у т и различны.

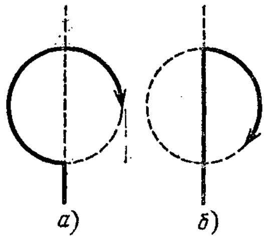

Рис. 41.

Дадим точное определение понятия пути. Пусть в некоторой фигуре $A$ движется точка, начиная от момента $t = 0$ до момента $t = 1$. Для каждого момента $t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, известно положение $a(t)$ движущейся точки, т. е. каждой точке $t$ отрезка $[0; 1]$ поставлена в соответствие точка $a(t) \in A$. Получается о т о б р а ж е н и е отрезка $[0; 1]$ в фигуру $A$, причем отображение н е п р е р ы в н о е, так как точка $a(t)$ «непрерывно» перемещается с изменением $t$. Это отображение и представляет собой путь. Мы приходим к следующему определению: *всякое непрерывное отображение отрезка* $[0; 1]$ *в фигуру* $A$ *называется путем* (в этой фигуре).

Любую простую дугу можно представлять себе как путь (ведь простая дуга получается с помощью г о м е о м о р ф н о г о отображения отрезка, а гомеоморфное отображение непрерывно). В частности, линию, рассмотренную в примере 15 (имеющую «площадь»), можно рассматривать как «след движущейся точки». Уже это показывает, что понятие пути является не слишком простым. Следующий пример еще более подтверждает это.

**Пример 20.** Покажем, что можно построить путь, который проходит через к а ж д у ю точку квадрата. Иными словами, существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат; такие пути называются *кривыми Пеано.* Для получения кривой Пеано построим в квадрате $Q$ все более извивающиеся «полоски-лабиринты»: будем делить квадрат на $4, 16, 64, \ldots, 4^n, \ldots$ конгруэнтных квадратиков (рис. 42), а затем уберем некоторые из их сторон (рис. 43), причем перегородки, оставленные на каком-то этапе построения, сохраняются и на всех последующих. Средние линии этих полосок (штриховая линия на рис. 43) и дадут в пределе *путь, заполняющий весь квадрат* $Q$, т. е. кривую Пеано. Более точно этот путь

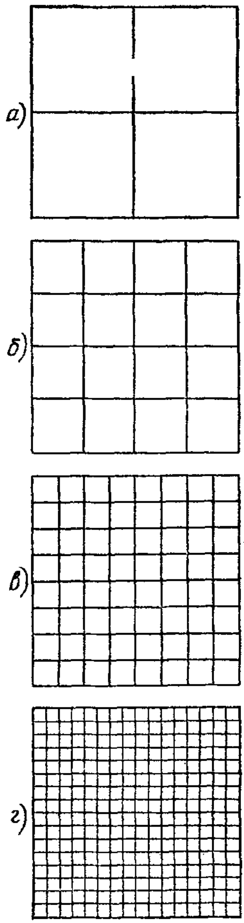

Рис. 42.

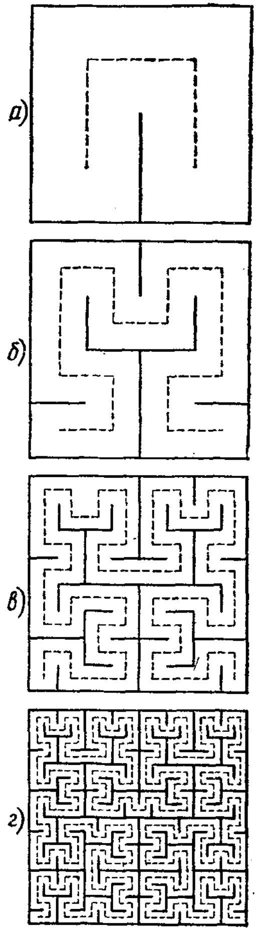

Рис. 43.

можно определить следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ на первую штриховую ломаную линию (рис. 43, *а*), при котором отрезок $[0; 1/4]$ отображается на часть этой ломаной, лежащую в левой нижней четверти большого квадрата, отрезок $[1/4, 1/2]$ — на часть, лежащую в левом верхнем квадрате, а отрезки [1/2, 3/4] и [3/4, 1] — на части, лежащие в пра вых (верхнем и нижнем) квадратах. Это отображение обо значим через $f_1(t)$ (где $0 \leqslant t \leqslant 1$). Далее, через $f_2(t$ обозначим отображение отрезка [0; 1] на вторую штрихо вую ломаную (рис. 43, *б*), при котором отрезки [0, 1/16] [1/16, 2/16], . . ., [15/16, 1] отображаются на последова тельные части этой ломаной, лежащие в шестнадцаті квадратах второго этапа. Аналогично, $f_3(t)$ будет отобра жением отрезка [0; 1] на пунктирную ломаную третьего этапа (рис. 43, *в*) и т. д. Предел последовательности функ ций $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots$ представляет собой отображени $f: [0; 1] \to Q$, т. е. некоторый п у т ь в квадрате $Q$; это и есть кривая Пеано. Легко пояснить, что этот предел существует. Возьмем, например, точку $^1/_3 \in [0; 1]$. Так как 1/3 лежит во в т о р о й четверти отрезка [0; 1], т. е. $^1/_3 \in [1/4, 1/2]$, то точка $f_1(1/3)$ лежит в левом верхнем квадрате на рис. 42, *а*. Далее, так как $^1/_3 \in [5/16, 6/16]$, то $f_2(1/3)$ лежит в шестом по порядку квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, *б* (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, *б*). Так как $^1/_3 \in [21/64, 22/64]$, то $f_3(1/3)$ лежит в 22-м квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, *в* (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, *в*), и т. д. Предел этой последовательности уменьшающихся квадратов (вложенных последовательно один в другой), т. е., в данном случае, левая верхняя вершина квадрата и есть точка $f(1/3)$. Таким же образом определяется точка $f(t)$ для любого $t \in [0; 1]$.

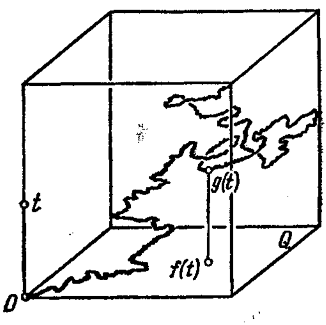


Рис. 44.

Заметим, что кривая Пеано не является простой дугой: она имеет бесконечно много точек «склеивания» (т. е. в квадрате имеется бесконечно много точек, через которые построенный путь $f(t)$ проходит более, чем один раз).

**Задачи**

52. Докажите, что в квадрате $Q$ имеются точки, через которые построенная кривая Пеано $f(t)$ проходит четыре раза, но нет точек, через которые она проходит пять раз.

53. Существует ли «пространственная кривая Пеано», т. е. путь в кубе, заполняющий весь этот куб?

54. Расположим в горизонтальной плоскости квадрат $Q$ и рассмотрим путь $f(t)$, представляющий собой кривую Пеано в этом квадрате. Через $g(t)$ обозначим точку в пространстве, расположенную н а д точкой $f(t)$ на высоте $t$ (рис. 44). Докажите, что когда $t$ пробегает отрезок $[0; 1]$, точка $g(t)$ пробегает путь в пространстве, представляющий собой п р о с т у ю д у г у. Докажите, что проекция этой простой дуги на горизонтальную плоскость заполняет весь квадрат $Q$. Иными словами, построенная линия (простая дуга) представляет собой замысловатую «крышу» над в с е м квадратом $Q$.

Этот пример показывает, что не только понятие пути, но даже понятие п р о с т о й д у г и не является таким простым, каким оно интуитивно кажется с первого взгляда.