ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

9. Теорема Эйлера

В следующей таблице указано число вершин, ребер и граней пяти *правильных многогранников.*

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Из рассмотрения этой таблицы видно, что для каждого правильного многогранника имеет место соотношение:

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2, \qquad (6)$$

где В — число вершин многогранника, Р — число его ребер, Г — число граней. Соотношение (6) легко проверяется также для пирамид, призм и других многогранников. Эйлер впервые подметил и доказал это замечательное свойство многогранников.

Уточним формулировку теоремы Эйлера. Прежде всего заметим, что любая грань каждого из рассмотренных многогранников гомеоморфна кругу. Далее, поверхность каждого из рассмотренных многогранников (или, вообще, любого выпуклого многогранника) гомеоморфна сфере: если o — произвольная внутренняя точка многогранника, а S — сфера с центром o, содержащая внутри себя этот многогранник, то проекция поверхности многогранника на сферу S из центра o представляет собой искомый гомеоморфизм. Таким образом, теорема Эйлера в уточненной формулировке принимает следующий вид: *для всякого многогранника, поверхность которого гомеоморфна сфере, а каждая грань гомеоморфна кругу, справедливо соотношение* (6).

Можно придать этой теореме чисто топологическую формулировку. Для этого заметим, что все вершины и ребра многогранника образуют связный граф, который разбивает поверхность многогранника на отдельные грани (т. е. куски, гомеоморфные кругу). Мы получаем следующее (более общее, чем теорема Эйлера) утверждение:

Пусть на сфере (или гомеоморфной ей поверхности) начерчен связный граф G, имеющий В *вершин и* Р *ребер и разбивающий сферу на* Г *областей («граней»); тогда справедливо соотношение* (6). Идея доказательства этой теоремы содержится в задаче 55.

Задачи

55. Пусть G — связный граф, начерченный на сфере, G^* — его максимальное дерево и k — число перемычек (т. е. ребер графа G, не содержащихся в G^*). Докажите, что граф G^* определяет на сфере лишь одну область (грань), и потому для него соотношение (6) справедливо. Докажите, что добавление каждой перемычки увеличивает число граней на одну, и получите отсюда доказательство теоремы Эйлера.

56. Докажите, что для любого связного графа, расположенного на плоскости, справедливо соотношение (6) (к числу «граней» надо причислять и наружную, неограниченную область).

57. Пусть G — граф, вложимый в плоскость. Докажите, что при любом способе его вложения в плоскость он разбивает плоскость на r — В + Р + 1 областей, где r — число компонент графа G, а В и Р — число его вершин и ребер.

58. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами (рис. 45), причем на сторонах n-угольника расположены m вершин разбиения, а внутри него p вершин. Докажите, что n-угольник разбит на $m + n + 2p - 2$ треугольников.

59. Обозначим через n_3 число треугольных граней выпуклого многогранника, через n_4 — число его четырехугольных граней и т. д. Докажите, что

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geqslant 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \ldots$$

В каком случае имеет место равенство?

60. Говорят, что связный граф, расположенный на сфере, определяет *топологически правильное разбиение* сферы, если каждая грань этого разбиения является n-угольником (т. е. ограничена замкнутой цепочкой из n ребер) и в каждой вершине сходятся k граней. Докажите, что в этом случае

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Р}},$$

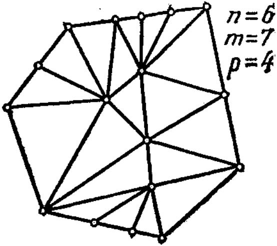

Рис. 45.

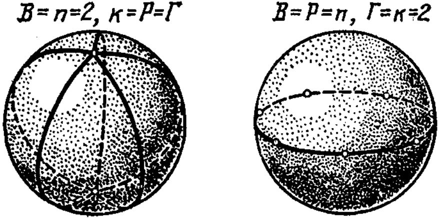

Рис. 46.

где Р — число ребер. Выведите отсюда, что кроме разбиений, топологически эквивалентных пяти правильным многогранникам, существуют лишь два типа топологически правильных разбиений, которые показаны на рис. 46.