10. Поверхности

Пример 21. На рис. 47 изображена «книжка с тремя листами». Вблизи точек x, y, z эта фигура устроена по-разному. Окрестность точки y имеет вид полукруга, причем точка y лежит н а е г о г р а н и ц е. В этом случае говорят, что точка y лежит на крае фигуры. Окрестность точки z состоит из трех полукругов, соединенных по общему диаметру; говорят, что в этом месте фигура *разветвляется* (т. е. к некоторой линии примыкает три или более «листов» рассматриваемой фигуры). Наконец, точка x имеет окрестность в виде круга, причем точка x лежит в н у т р и этого круга; здесь фигура не имеет ни края, ни разветвления.

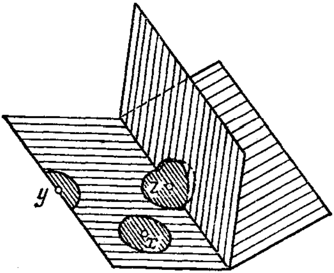


Рис. 47.

Фигура, у которой каждая точка x имеет окрестность, гомеоморфную кругу (в н у т р и которого лежит точка x), называется *поверхностью*. Поверхность не имеет краев и разветвлений. Сфера и тор являются поверхностями. Рассматривают также *поверхности с краем*; они имеют края, но не имеют разветвлений. Круг — поверхность с краем. Сфера, в которой вырезаны несколько круглых отверстий (рис. 48), также является поверхностью с краем.

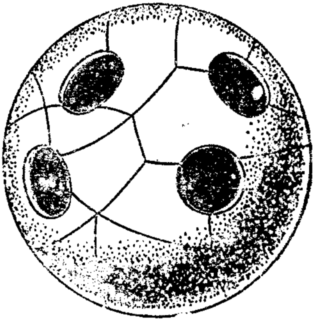


Рис. 48.

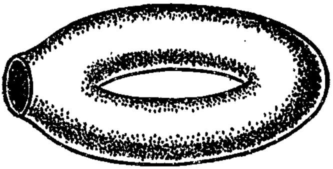


Рис. 49.

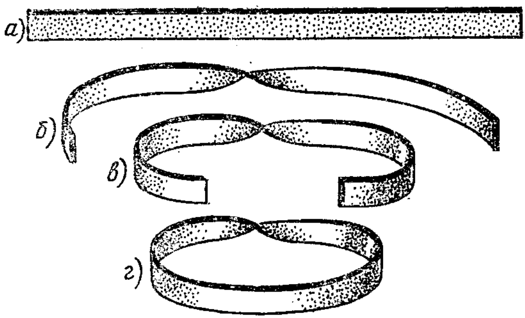


Рис. 50.

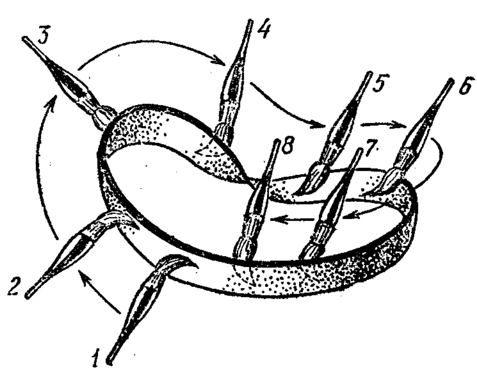


Рис. 51.

Пример 22. Если на торе вырезать круглую дыру, то мы получим поверхность с краем, которая называется *ручкой* (рис. 49).

Пример 23. Интересный пример поверхности с краем был описан в 1862—1865 годах в работах немецких математиков Мёбиуса и Листинга. Она получается следующим образом. Лента прямоугольной формы (рис. 50, *а*) один раз перекручивается (рис. 50, *б*, *в*) и затем ее концы склеиваются. Полученная поверхность с краем (рис. 50, *г*)

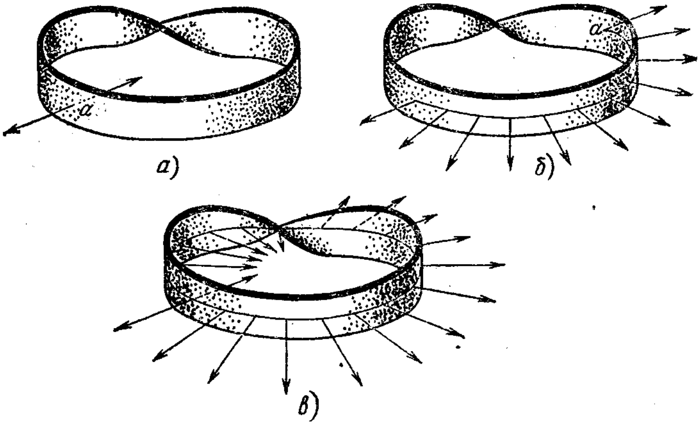
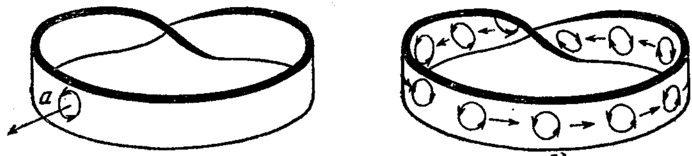


Рис. 52.

называется *лентой Мёбиуса*. Эта поверхность имеет л и ш ь о д н у с т о р о н у. Например, перемещая кисточку по ленте Мёбиуса (рис. 51), мы придем к тому же месту, с которого начинали закрашивание, но с обратной стороны. Перемещая кисточку дальше, мы закрасим всю ленту Мёбиуса и убедимся, что у нее нет «второй стороны».

Разумеется, наглядное описание односторонней поверхности с помощью «окрашивания» возможно лишь для «толстой поверхности», изготовленной из некоторого материала; математически же поверхность не имеет толщины. Поэтому приведем другое описание «односторонности». В каждой точке *а* ленты Мёбиуса можно провести два противоположных вектора, перпендикулярных к ней в этой точке (рис. 52, *а*). Эти векторы называют *нормалями* к ленте Мёбиуса в точке *а*. Выберем одну из них и начнем перемещать точку *а* вместе с нормалью по ленте Мёбиуса (рис. 52, *б*). Когда точка *а* обойдет всю ленту Мёбиуса, перемещающаяся нормаль перейдет не в свое первоначальное положение, а в противоположное (рис. 52, *в*). Итак, *на ленте Мёбиуса существует такой замкнутый путь* (*обход*), *что при прохождении этого пути нормаль к поверхности приходит в положение, противоположное первоначальному.* Поверхности, обладающие такими обходами, и называются *односторонними.*

Однако, говоря о нормалях, мы изучаем не только саму поверхность, но и ее расположение в пространстве.



а) *б*)

Рис. 53.

Поэтому приведем «внутреннее» определение односторонних поверхностей. Условимся вокруг точки *а*, из которой проведена нормаль, описывать небольшую окружность и на ней отмечать стрелкой направление, которое из конца проведенной нормали наблюдается как направление против часовой стрелки (рис. 53, *а*). Если точка *а* перемещается, то вместе с ней перемещается и нормаль, а также окружность с имеющимся на ней направлением. Когда мы обведем окружность по всей ленте Мёбиуса, направление на окружности изменится на противоположное (так как нормаль изменит свое направление, рис. 53, *б*).

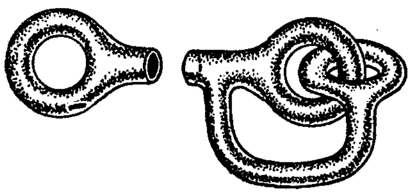


Рис. 54.

Итак, на ленте Мёбиуса имеется такой замкнутый путь (обход), что при перемещении окружности вдоль этого пути направление на окружности меняется на противоположное. Такие обходы называются *обращающими ориентацию.*

Если на поверхности нет обращающих ориентацию обходов, то она называется *ориентируемой* (или двусторонней), если есть — *неориентируемой* (или *односторонней*). С наглядной точки зрения ориентируемость означает, что всю поверхность можно покрыть маленькими окружностями и выбрать на них такие направления, что близкие окружности будут ориентированы о д и н а к о в о.

Пусть теперь Q_1 и Q_2 — две поверхности, у каждой из которых имеется край, гомеоморфный окружности (рис. 54). Соединив («склеив») края этих поверхностей,

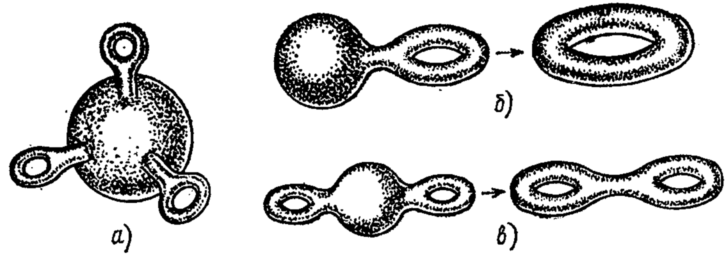


Рис. 55.

мы получим одну новую поверхность. Говорят, что дыра, имеющаяся в поверхности Q_1, заклеивается поверхностью Q_2 (или наоборот).

Пример 24. Рассмотрим сферу, в которой вырезано p круглых дыр, и заклеим каждую из дыр ручкой. Полученная поверхность (рис. 55, *а*) называется *сферой с* p *ручками*. Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору (рис. 55, *б*), а сфера с двумя ручками — поверхности «кренделя» (получающейся склеиванием двух ручек, рис. 55, *в*).

Задачи

61. Докажите, что граф «домики и колодцы» (пример 12) можно расположить (без самопересечений) на ленте Мёбиуса.

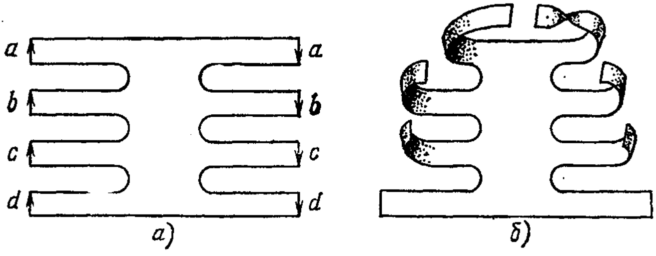


Рис. 56.

62. У «зубчатой» фигуры, изображенной на рис. 56, *а*, склеиваются с перекручиванием каждые два отрезка, обозначенные одинаково (рис. 56, *б*). Докажите, что получающаяся поверхность является односторонней, а ее край гомеоморфен окружности.

63. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, не соединяющихся между собой. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с тремя ручками.

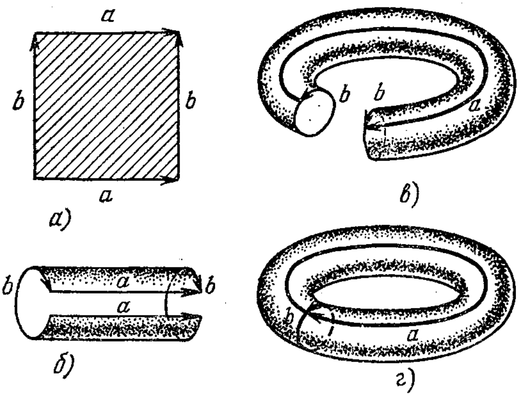


Рис. 57.

64. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, оси которых проходят через центр шара. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с пятью ручками.

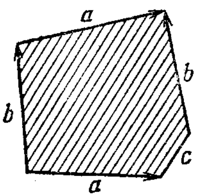


Рис. 58.

65. Если попарно склеить противоположные стороны квадрата с учетом указанных на рис. 57, *а* направлений, то получится тор (рис. 57, *б*, *в*, *г*). Какая поверхность получится, если склеивание произвести с учетом направлений на рис. 58 (сторона *c* остается не склеенной)?

66. Какая поверхность получится, если в $4k$-угольнике, показанном на рис. 59, попарно склеить одинаково обозначенные стороны с учетом направлений?

Мы подходим к формулировке замечательной теоремы о *топологической классификации поверхностей*, получен-

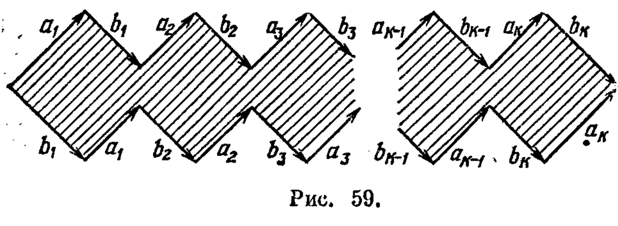


Рис. 59.

ной в прошлом столетии Мёбиусом и французским математиком Жорданом. Условимся рассматривать только *замкнутые поверхности* (которые не имеют края и допускают разбиение на конечное число многоугольников). Плоскость, например, не является замкнутой поверхностью: конечный граф, начерченный на плоскости не разбивает ее на области, которые все гомеоморфны кругу. Задача топологической классификации поверхностей заключается в том, чтобы *указать такие попарно не гомеоморфные замкнутые поверхности, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из них*. Иначе говоря, нужно перечислить *все топологически различные замкнутые поверхности.*

Решение этой задачи рассмотрим сначала для *ориентируемых* поверхностей. Обозначим через P_0 сферу, а через P_k — сферу с k ручками. Оказывается, что *поверхности*

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \ldots, \quad P_k, \ldots \tag{7}$$

и дают полную топологическую классификацию замкнутых ориентируемых поверхностей, т. е. здесь перечислены все топологически различные типы таких поверхностей. Доказательство будет дано в следующих двух пунктах.