11. Эйлерова характеристика поверхности

Пусть Q — поверхность (с краем или без края, двусторонняя или односторонняя), которая допускает *разбиение на многоугольники*; это означает, что на поверхности можно «нарисовать» граф, разбивающий ее на конечное число кусков, гомеоморфных кругу. Обозначим число вершин и ребер графа через В и Р, а число многоугольников, на которые Q разбивается этим графом,— через Г. Число

$$\chi(Q) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г} \tag{8}$$

называется *эйлеровой характеристикой* поверхности Q. Строго говоря, число (8) определяется не самой поверхностью Q, а выбором ее разбиения на многоугольники. Однако теорема Эйлера показывает, что для поверхности Q, гомеоморфной сфере, эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения на многоугольники: $\chi(Q) = 2$ (см. (6)). Мы докажем, что и *для любой поверхности Q ее эйлерова характеристика $\chi(Q)$ не зависит от выбора разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью, является ее топологическим инвариантом.*

В самом деле, пусть на поверхности Q «нарисованы» два графа G_1, G_2, каждый из которых задает разбиение на многоугольники. Числа вершин, ребер и граней разбиения, определяемого графом G_1, обозначим через $В_1$, $Р_1$, $Г_1$, а соответствующие числа для разбиения, определяемого графом G_2,— через $В_2$, $Р_2$, $Г_2$. Вообще говоря, графы G_1 и G_2 могут пересекаться в бесконечном числе точек. Однако, «пошевелив» граф G_1, мы сможем добиться того, чтобы G_1 и G_2 пересекались лишь в конечном числе точек.

Далее, если граф $G_1 \bigcup G_2$ несвязен, то, «пошевелив» графы G_1, G_2, можно добиться того, чтобы они имели общие точки и, следовательно, их объединение было связным. Итак, мы можем предполагать, что графы G_1 и G_2 пересекаются лишь в конечном числе точек и имеют связное объединение $G_1 \bigcup G_2$. Считая новыми вершинами все точки пересечения графов G_1 и G_2, а также все вершины этих графов, мы найдем, что $G_1 \bigcup G_2$ является конечным связным графом (его ребрами являются куски ребер графов G_1 и G_2, на которые они разбиваются вершинами графа $G_1 \bigcup G_2$).

Обозначим через В и Р число вершин и ребер графа $G_1 \bigcup G_2$, а через Г — число граней, на которые он разбивает поверхность Q. Идея состоит в том, чтобы доказать равенства

$$\left.\begin{aligned} В_1 - Р_1 + Г_1 = В - Р + Г, \\ В_2 - Р_2 + Г_2 = В - Р + Г, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

из которых и будет следовать, что $В_1 - Р_1 + Г_1 = В_2 - Р_2 + Г_2$. Оба равенства (9) доказываются одинаково; докажем первое.

Пусть M — некоторый многоугольник («грань»), определяемый графом G_1. Обозначим число вершин и ребер графа $G_1 \bigcup G_2$, расположенных внутри M (не на контуре), через $В'$ и $Р'$, а число вершин (а значит, и ребер) этого графа, расположенных на контуре многоугольника M, через q. Далее, число граней, определяемых графом $G_1 \bigcup G_2$ и содержащихся в M, обозначим через $Г'$. На рис. 60 имеем $В' = 4$, $Р' = 12$, $Г' = 9$, $q = 15$.

Вырежем теперь многоугольник M (вместе с имеющейся на нем частью графа $G_1 \bigcup G_2$) из поверхности Q. Так как M гомеоморфен кругу и, значит, полусфере, то его можно второй («нижней») полусферой дополнить до поверхности, гомеоморфной сфере (рис. 61). На этой сфере расположен связный граф, имеющий $В' + q$ вершин, $Р' + q$ ребер и определяющий $Г' + 1$ граней ($Г'$ граней содержится в M и еще одной гранью является нижняя полусфера). Следовательно, согласно (6), $(В' + q) - (Р' + q) + (Г' + 1) = 2$, т. е.

$$В' - Р' + Г' = 1. \qquad (10)$$

Если теперь (возвращаясь к поверхности Q, на которой начерчен граф $G_1 \cup G_2$) мы выбросим из графа $G_1 \cup G_2$ его часть, расположенную в н у т р и M, то получится новый граф, для которого, однако, число $В - Р + Г$ останется таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. В самом деле,

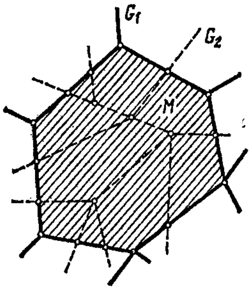

Рис. 60.

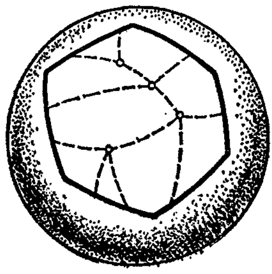

Рис. 61.

вместо $В'$ вершин, $Р'$ ребер и $Г'$ граней, имевшихся в н у т р и M, мы теперь будем иметь 0 вершин, 0 ребер и одну грань (сам многоугольник M), т. е. число $В' - Р' + Г'$ заменится на $0 - 0 + 1$, а это, согласно (10), ничего не меняет.

Теперь ясно, что если мы из графа $G_1 \cup G_2$ выбросим его части, расположенные в н у т р и в с е х многоугольников, определяемых графом G_1, то получим новый граф G^*, для которого число $В - Р + Г$ будет таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. Иначе говоря,

$$В^* - Р^* + Г^* = В - Р + Г, \qquad (11)$$

где $В^*$ и $Р^*$ — число вершин и ребер графа G^*, а $Г^*$ — число определяемых им граней.

Заметим, наконец, что граф G^* получается из G_1 добавлением нескольких новых вершин на ребрах. Добавление каждой новой вершины увеличивает число ребер на 1 (поскольку добавленная вершина разбивает одно из ребер на два). Следовательно, если переход от графа G_1 к G^* осуществляется добавлением k новых вершин, то $В^* = В_1 + k$, $Р^* = Р_1 + k$. Кроме того, $Г^* = Г_1$ (так как граф

G^* определяет те же грани, что и граф G_1). Таким образом,

$$B^* - P^* + \Gamma^* = (B_1 + k) - (P_1 + k) + \Gamma_1 = \\ = B_1 - P_1 + \Gamma_1,$$

а это, согласно (11), и дает первое из соотношений (9).

Итак, эйлерова характеристика поверхности не зависит от ее разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью. Кроме того, эйлерова характеристика является *топологическим инвариантом*: если поверхности Q_1 и Q_2 гомеоморфны, то $\chi(Q_1) = \chi(Q_2)$. В самом деле, при гомеоморфизме $f: Q_1 \to Q_2$ граф G_1, начерченный на поверхности Q_1, переходит в граф $G_2 = f(G_1)$, начерченный на Q_2, причем вершин, ребер и граней на поверхности Q_2 будет столько же, сколько и на поверхности Q_1.

Задачи

67. Докажите, что сфера с вырезанными в ней q дырами имеет эйлерову характеристику $2 - q$.

68. Пусть Q_1 и Q_2 — две поверхности, каждая из которых имеет край, гомеоморфный окружности. Докажите, что, склеивая эти края (см. рис. 54), мы получим поверхность, эйлерова характеристика которой равна $\chi(Q_1) + \chi(Q_2)$.

69. Чему равна эйлерова характеристика круга? Ручки? Ленты Мёбиуса?

70. Докажите, что эйлерова характеристика поверхности P_k равна $2-2k$.

71. На торе осуществлено топологически правильное разбиение (см. задачу 60). Докажите, что каждая грань является либо треугольником, либо четырехугольником, либо шестиугольником. Приведите примеры правильных разбиений каждого из этих типов.

72. На замкнутой поверхности Q нарисован граф с В вершинами и Р ребрами. Он разбивает поверхность Q на Г областей (среди которых, возможно, есть не гомеоморфные кругу). Докажите, что $B - P + \Gamma \geqslant \chi(Q)$.

Указание. Для того чтобы разрезать поверхность Q на многоугольники (гомеоморфные кругу), достаточно последовательно применить одну или несколько операций следующего вида: а) добавление новой вершины на одном из ребер графа; б) добавление ребра, имеющего лишь одну общую вершину с начерченным графом; в) добавление ребра, соединяющего две вершины уже начерченного графа. Проверьте, что при каждой из этих операций число $B - P + \Gamma$ может лишь уменьшиться.

73. На замкнутой поверхности Q начерчен граф с В вершинами и P ребрами; поверхность Q разбивается этим графом на Г областей. Докажите, что если каждая из областей имеет на своей границе не менее k ребер, то $(k - 2) P \leqslant kB - k\chi(Q)$.