12. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей

Поверхности (7) попарно не гомеоморфны, так как имеют р а з н ы е эйлеровы характеристики (задача 70). Таким образом, для доказательства теоремы, сформулированной в конце пункта 10, остается установить, что л ю б а я замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (7). Доказательство проведем в несколько этапов.

А) Пусть Q — некоторая связная замкнутая ориентируемая поверхность. Начертим на ней связный граф G, разбивающий ее на грани, гомеоморфные кругу. Для каждой вершины графа G возьмем на поверхности Q маленький кружок, содержащий внутри себя эту вершину. Эти кружки будем называть *шапочками*. Далее, для каждого ребра графа G возьмем узкую *полоску*, идущую вдоль этого ребра и соединяющую шапочки, которые соответствуют концам взятого ребра. Если удалить из поверхности Q все шапочки и все полоски, то от каждой грани останется кусок, гомеоморфный кругу; этот кусок будем

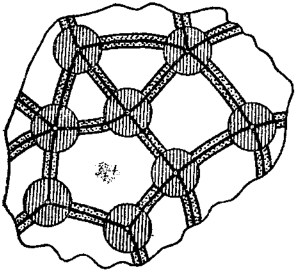

Рис. 62.

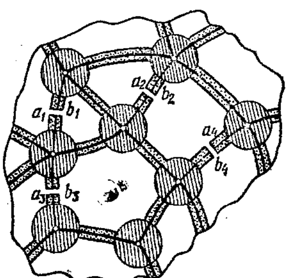

Рис. 63.

называть *сердцевиной* грани. На рис. 62, на котором изображен кусок поверхности Q, шапочки заштрихованы, полоски покрыты точками, а сердцевины оставлены белыми. Идея заключается в том, чтобы разрезать поверхность Q на шапочки, полоски, сердцевины, а затем снова склеить ее из этих кусков, прослеживая шаг за шагом, что получается при склеивании.

Прежде всего вырежем из поверхности Q все сердцевины граней; оставшуюся часть поверхности обозначим через Q_0. Ее край состоит из всех контуров сердцевин.

Б) Выделим в графе G максимальное дерево (на рис. 63 оно вычерчено жирно), и все полоски, соответствующие перемычкам (т. е. ребрам графа G, не входящим в это дерево), рассечем в середине. Отрезки $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p$, по которым производится рассечение полосок, назовем *хордами*. Рассечение будем производить постепенно: рассечение по хорде a_1b_1 превращает Q_0 в поверхность Q_1; если в Q_1 произвести рассечение по хорде a_2b_2, получим поверхность Q_2; ...; наконец, рассекая Q_{p-1} по хорде a_pb_p, получим поверхность Q_p. Для получения из Q_p поверхности Q_0 нужно вновь произвести склеивание по хордам.

В) Прежде чем осуществлять эти обратные склеивания, заметим, что *поверхность Q_p гомеоморфна кругу*. В самом деле, будем вычерчивать максимальное дерево графа G, беря одно ребро, еще одно, еще одно и т. д.— так, чтобы все время получалось дерево. Полоска и две шапочки, соответствующие первому ребру и его концам, составляют поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, *а*). Добавление полоски и шапочки, соответствующих второму ребру, снова дает поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, *б*).

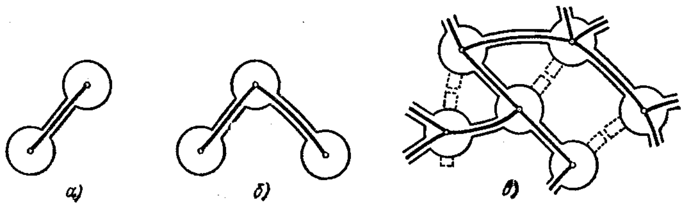

Рис. 64.

Вообще, при каждом проведении ребра, к уже имевшейся поверхности, гомеоморфной кругу, приклеиваются одна полоска и одна шапочка, что вновь дает поверхность, гомеоморфную кругу. В конце концов, вычертив максимальное дерево графа G, мы получим гомеоморфную кругу поверхность, составленную из всех шапочек и тех полосок, которые соответствуют ребрам максимального дерева. Для получения поверхности Q_p остается приклеить *полуполоски*, образовавшиеся из оставшихся полосок после рассечения по хордам (пунктир на рис. 64, *в*). Но каждое приклеивание полуполоски оставляет поверхность гомеоморфной кругу.

Мы покажем теперь, что *каждая из поверхностей Q_p, $Q_{p-1}, \ldots, Q_1, Q_0$ гомеоморфна сфере, в которой вырезаны* *несколько дыр и часть из них заклеена ручками.* Относительно поверхности Q_p это очевидно: она гомеоморфна кругу, т. е. сфере, в которой вырезана одна дыра и не вклеено ни одной ручки.

Г) Рассмотрим при каждом $i = 1, \ldots, p$ переход от поверхности Q_{i-1} к поверхности Q_i (т. е. рассечение по хорде a_ib_i) и обратный переход от Q_i к Q_{i-1}. Здесь могут

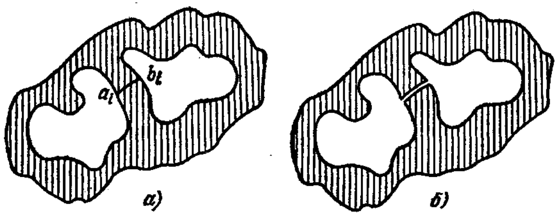

Рис. 65.

представиться две возможности: точки a_i и b_i расположены на одной и той же компоненте края поверхности Q_{i-1} или на разных компонентах.

Если a_i и b_i расположены на разных компонентах края поверхности Q_{i-1}, то рассечение по хорде a_ib_i приводит к уменьшению числа дыр на одну (рис. 65, *а* и *б*). Следовательно, обратный переход (от Q_i к Q_{i-1}) сводится к вырезанию одной новой дыры. Поэтому, если Q_i получалась из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1}.

Д) Пусть теперь концы хорды a_ib_i принадлежат одной компоненте края поверхности Q_{i-1} (рис. 66). Получающаяся при рассечении поверхность Q_i (рис. 67) гомеоморфна поверхности (рис. 68), получающейся из Q_{i-1} двумя разрезами: сначала по замкнутой линии l, не пересекающейся с краем поверхности Q_{i-1} (это дает промежуточную поверхность Q_i^*, (рис. 69), а затем по хорде a_ic_i, концы которой лежат на разных компонентах края поверхности Q_i^*. Обратный переход от Q_i (см. рис. 68) к Q_i^* (рис. 69), как мы видели в пункте Г), сводится к вырезанию одной дыры. Остается рассмотреть переход от Q_i^* к Q_{i-1}.

Итак, пусть Q_i^* получается из Q_{i-1} разрезанием по контуру l, не пересекающемуся с краем поверхности Q_{i-1}.

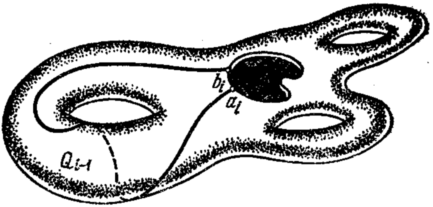

Рис. 66.

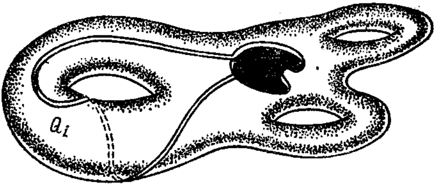

Рис. 67.

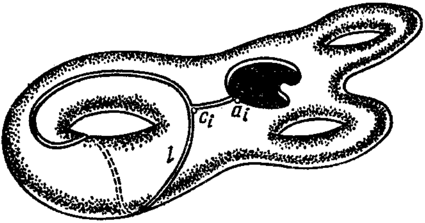

Рис. 68.

Рис. 69.

Рис. 70.

Если вместо того, чтобы производить этот разрез, мы вырежем из Q_{i-1} узкую полоску L, заключающую внутри себя линию l (рис. 70), то получится поверхность, гомеоморфная Q_i^*. Полоска L гомеоморфна либо ленте Мёбиуса, либо боковой поверхности цилиндра. В самом деле, если

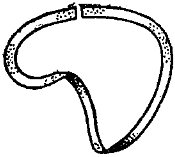

Рис. 71.

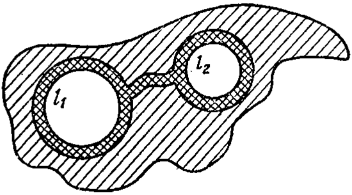

Рис. 72.

эту полоску разрезать (рис. 71), то ее можно распрямить в узкую прямоугольную ленту; следовательно, L можно получить склеиванием концов прямоугольной ленты, и надо лишь проследить, происходит это склеивание с перекручиванием или нет.

Но ленте Мёбиуса полоска L гомеоморфна быть не может, так как на ленте Мёбиуса имеется обход, обращающий ориентацию, а исходная поверхность Q (и все поверхности $Q_0, Q_1, \ldots, Q_p$) ориентируемы. Итак, L гомеоморфна боковой поверхности цилиндра. Следовательно, после разрезания по линии l она распадается на две части, и потому поверхность Q_i^* имеет по сравнению с Q_{i-1} две новые компоненты края l_1, l_2. Обратный переход от Q_i^* к Q_{i-1} заключается в склеивании двух контуров дыр l_1, l_2, имеющихся на поверхности Q_i^*.

Окружим контуры l_1, l_2 узкими кольцевыми полосками и соединим их полоской друг с другом. Мы получим на поверхности Q_i^* фигуру («очки», рис. 72), гомеоморфную кругу с двумя дырами (рис. 73). Склеивание контуров l_1 и l_2 должно производиться с учетом противоположной ориентации на них, так как иначе полоска, заштрихованная на рис. 74, превратилась бы при склеивании в ленту Мёбиуса, что невозможно в силу ориентируемости поверхности Q_{i-1}. Следовательно, склеивание контуров l_1 и l_2 равносильно вклеиванию в поверхность Q_i^* ручки (рис. 75). Итак, переход от Q_i к Q_i^*

сводится к вырезыванию одной дыры, а переход от Q_i^* к Q_{i-1} — к уменьшению числа дыр и вклеиванию одной ручки. Поэтому, если Q_i получалось из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1}.

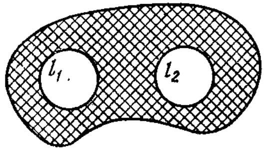

Рис. 73.

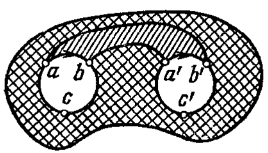

Рис. 74.

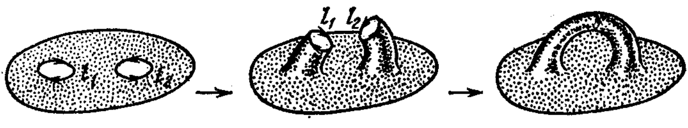

Рис. 75.

Е) Проведенная индукция показывает, что Q_0 получается из сферы вырезанием $k + r$ дыр и заклеиванием k из них ручками ($k \geqslant 0$, $r \geqslant 0$). Остается заметить, что при переходе от Q_0 к исходной поверхности Q в поверхность Q_0 вновь вклеиваются все сердцевины, т. е. каждая из r дыр, имеющихся в поверхности Q_0, заклеивается кругом. Таким образом, Q получается из сферы вырезанием k дыр и заклеиванием их всех ручками, т. е. Q гомеоморфна одной из поверхностей (7).

Задачи

74. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации ориентируемых поверхностей с краем

75. На поверхности P_k проведено q контуров, не пересекающихся друг с другом, причем после разрезания по всем этим контурам поверхность остается связной. Докажите, что $q \leqslant k$.

76. На замкнутой поверхности Q осуществлено топологически правильное разбиение: каждая грань — пятиугольник, в каждой вершине сходятся по четыре грани. Докажите, что если число граней не кратно восьми, то поверхность Q неориентируема.

77. На замкнутой поверхности Q проведены три линии p, q, r, гомеоморфные отрезку, которые имеют общие концы и попарно не имеют других общих точек. Докажите, что если разрез по одной из линий $p \cup q$, $p \cup r$, $q \cup r$ оставляет поверхность связной, то хотя бы одна из двух других также обладает этим свойством.

78. Если на одной из граней правильного додекаэдра (рис. 76,*а*) продолжить все стороны до пересечения, то мы получим правильную пятиконечную звезду (рис. 76, *б*). Две такие звезды, построен-

ные на смежных гранях (рис. 76, *в*) имеют общий отрезок *ad*. Условимся, однако, считать, что эти звезды примыкают друг к другу только по отрезкам *ab* и *cd*, а отрезок *bc* будем считать «лишним» пересечением этих звезд, происходящим из-за «неудачного» расположения этих звезд в пространстве. После построения аналогичных звезд для в с е х граней додекаэдра (рис. 76, *г*) мы получим некоторую поверхность Q, расположенную в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра исходного

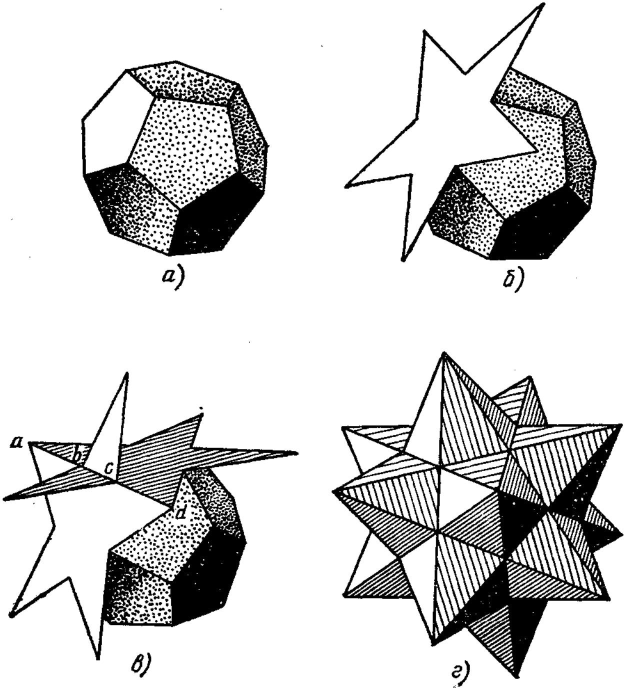

Рис. 76.

додекаэдра). Докажите, что эта поверхность является ориентируемой и имеет эйлерову характеристику $\chi(Q) = -16$, а значит, гомеоморфна сфере с девятью ручками.

Можно построить и иную поверхность, связанную с додекаэдром. Добавим к контуру каждой звезды такие отрезки, как *bc* (рис. 76, *в*), так что получится замкнутая пятизвенная ломаная (самопересекающаяся). Затем расправим эти ломаные, устранив самопересечения (так что сторонами станут отрезки типа *ad*), и на каждую из них натянем грань (пятиугольник). Тогда получится поверхность, состоящая из двенадцати пятиугольных граней, причем число вершин (таких, как *a*, *d*) будет также равно 12, а число ребер 30. Докажите, что эта поверхность ориентируема и имеет эйлерову характеристику $\chi = -6$, а значит, гомеоморфна сфере с четырьмя ручками.

79. Построим на каждой грани куба «четырехконечную звезду» (с искривленными лучами; см. рис. 77, *а*) так, чтобы соседние звезды соприкасались краями лучей (рис. 77, *б*). После построения таких звезд на всех гранях куба получится поверхность, расположенная

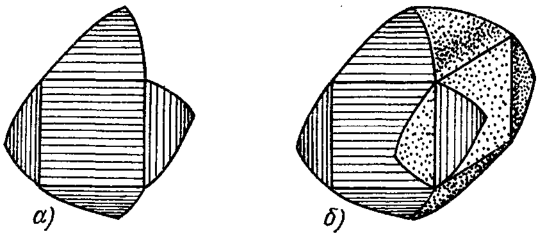

Рис. 77.

в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра куба). Докажите, что эта поверхность гомеоморфна P_3.

80. Какие поверхности получатся, если построить «трехконечные звезды» (аналогично тому, как описано в условии задачи 79) на гранях тетраэдра, октаэдра, икосаэдра?