

## 11. Эйлерова характеристика поверхности

Пусть  $Q$  — поверхность (с краем или без края, двусторонняя или односторонняя), которая допускает разбиение на многоугольники; это означает, что на поверхности можно «нарисовать» граф, разбивающий ее на конечное число кусков, гомеоморфных кругу. Обозначим число вершин и ребер графа через  $V$  и  $P$ , а число многоугольников, на которые  $Q$  разбивается этим графом, — через  $\Gamma$ . Число

$$\chi(Q) = V - P + \Gamma \quad (8)$$

называется *эйлеровой характеристикой* поверхности  $Q$ . Строго говоря, число (8) определяется не самой поверхностью  $Q$ , а выбором ее разбиения на многоугольники. Однако теорема Эйлера показывает, что для поверхности  $Q$ , гомеоморфной сфере, эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения на многоугольники:  $\chi(Q) = 2$  (см. (6)). Мы докажем, что и для любой поверхности  $Q$  ее эйлерова характеристика  $\chi(Q)$  не зависит от выбора разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью, является ее топологическим инвариантом.

В самом деле, пусть на поверхности  $Q$  «нарисованы» два графа  $G_1, G_2$ , каждый из которых задает разбиение на

расположения поверхности в пространстве. Полученная поверхность называется *бутылкой Клейна*. Она одно-сторонняя! начав движение от точки, расположенной на внешней поверхности горлышка, можно пройти внутрь горлышка (рис. 78, б).

**Пример 26.** Так как край ленты Мёбиуса гомеоморфен окружности (рис. 79), то можно попытаться приклеить

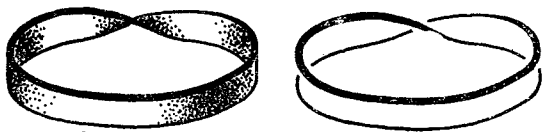


Рис. 79.

ленту Мёбиуса своим краем к краю дыры, вырезанной в некоторой поверхности. На рис. 80, а изображена лента Мёбиуса (кольцо с перекручиванием), а на рис. 80, б — кусок поверхности  $Q$  с вырезанной в ней дырой. Если «разогнуть» внутреннюю «лопасть» поверхности  $Q$ , то легко увидеть (рис. 80, в), что в ней вырезана

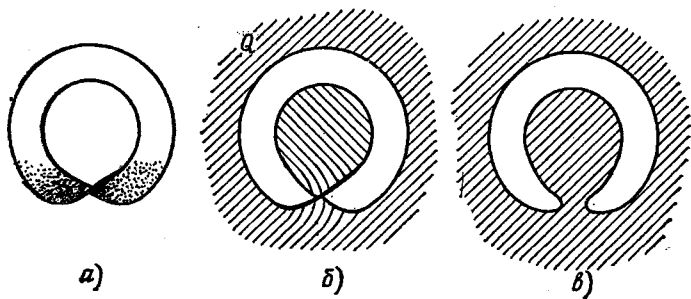


Рис. 80.

дыра, гомеоморфная кругу. Так как поверхности, изображенные на рис. 80, а и б, имеют одинаковый край, то можно склеить их краями, т. е. *вклеить ленту Мёбиуса в круглую дыру, вырезанную в поверхности  $Q$* . Правда, при этом лента Мёбиуса окажется пересекающей с поверхностью  $Q$ , но мы будем считать, что пересечение возникает лишь из-за «неудачного» расположения в пространстве.

Заклеивание дыры лентой Мёбиуса можно описать и иначе. Разрежем ленту Мёбиуса по ее средней линии. Для этого мы должны сначала склеить боковые стороны прямоугольника (с перекручиванием — чтобы

получилась лента Мёбиуса), а затем произвести разрез по линии  $mnp$  (рис. 81, а). Но можно выполнить действия в обратном порядке: сначала разрезать прямоугольник по линии  $mnp$  (рис. 81, б), а затем произвести склеивание боковых отрезков (с учетом направления стрелок). Для склеивания повернем нижнюю половину прямоугольника «наизнанку» (рис. 81, в) и расположим половинки, как на рис. 81, г. Теперь нетрудно произвести необходимые

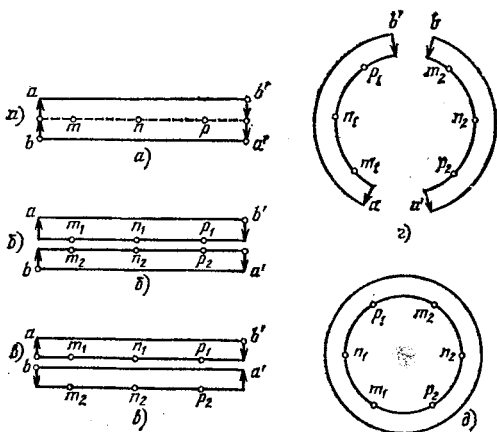


Рис. 81.

склеивания (рис. 81, д). Мы видим, что разрезание ленты Мёбиуса по средней линии дает фигуру, гомеоморфную кольцу. На рис. 81 показаны точки, получившиеся из точек  $m$ ,  $n$ ,  $p$  при разрезании по средней линии. На рис. 81, д одинаково обозначенные точки являются диаметрально противоположными. Обратное склеивание снова превращает кольцо в ленту Мёбиуса. Следовательно, если на одной окружности кольца склеить между собой каждые две диаметрально противоположные точки, то мы получим ленту Мёбиуса.

Пусть теперь  $l$  — контур круглой дыры на некоторой поверхности  $Q$ . Вырежем из поверхности узкую полоску (кольцо) вокруг дыры  $l$  и обозначим через  $l'$  наружный контур этого кольца (рис. 82). Тогда получится поверхность, гомеоморфная  $Q$  (только с несколько большей дырой  $l'$ ), и отдельно кольцо. Склеим теперь на контуре  $l$  отрезанного кольца каждые две диаметрально противоположные точки; тогда кольцо превратится в ленту

Мёбиуса. Эту ленту Мёбиуса мы и вклеим в дыру  $l'$ . В результате мы вклеим в поверхность  $Q$  (точнее, в поверхность, гомеоморфную ей) ленту Мёбиуса. Но разрезание поверхности по контуру  $l'$  и обратное склеивание этого разреза можно было и не делать: достаточно было просто склеить на контуре  $l$  каждые две диаметрально противоположные точки. Итак, склеивание *каждых двух диаметрально противоположных точек на контуре круглой дыры равносильно вклеиванию в эту дыру ленты Мёбиуса*.

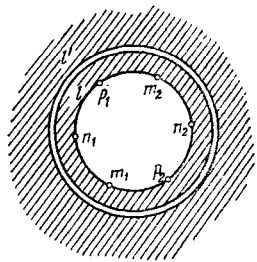


Рис. 82.

**Пример 27.** В проективной геометрии к точкам обычной (евклидовой) плоскости присоединяются *несобственные* (бесконечно удаленные) точки. Присоединение бесконечно удаленных точек производится таким образом, что к каждой прямой, проходящей в евклидовой плоскости, присоединяется *одна* бесконечно удаленная точка, причем для всех параллельных между собой прямых эта бесконечно удаленная точка одна и та же (т. е. параллельные прямые «пересекаются в бесконечности»), а для

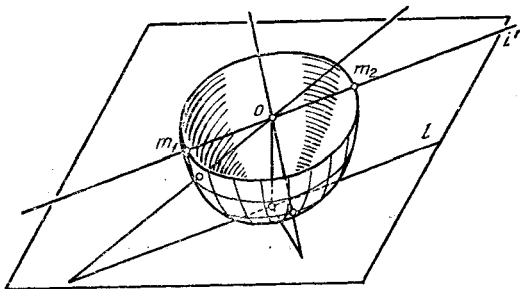


Рис. 83.

непараллельных прямых бесконечно удаленные точки *различны*. Плоскость, пополненная бесконечно удаленными точками, называется *проективной плоскостью*.

Чтобы выяснить топологическую структуру проективной плоскости, рассмотрим полусферу с центром  $o$ , касающуюся плоскости и расположенную так, что диаметрально противоположная плоскости полусферы параллельна плоскости (рис. 83). Центральное проектирование из точки  $o$  явля-

ется гомеоморфным отображением открытой полусферы (получающейся выбрасыванием из полусферы всех точек ограничивающей ее окружности) на всю евклидову плоскость.

Проведем теперь через точку касания полусферы прямую  $l$  на плоскости, а через точку  $o$  — прямую  $l'$ , параллельную  $l$ . Прямые  $l$  и  $l'$  «пересекаются в бесконечности» так, что точки  $m_1$  и  $m_2$ , в которых прямая  $l'$  пересекается с краем полусферы, «проектируются» (вдоль прямой  $l'$ ) в одну и ту же точку — в бесконечно удаленную точку прямой  $l$ . Следовательно, отображение полусферы с краем на плоскость, пополненную бесконечно удаленными точками (т. е. на проективную плоскость), не является взаимно однозначным: двум различным точкам  $m_1, m_2$  на крае полусферы соответствует одна и та же точка проективной плоскости. Чтобы это отображение стало взаимно однозначным (и гомеоморфным), нужно склеить между собой каждые две диаметрально противоположные точки на крае полусферы. Иначе говоря, проективная плоскость гомеоморфна полусфере, к краю которой приклеена лента Мёбиуса (или сфере с одной дырой, которая заклеена лентой Мёбиуса). Из этого следует, что проективная плоскость (в отличие от евклидовой) является односторонней поверхностью.

Теперь мы можем сформулировать вторую половину теоремы Мёбиуса—Жордана о классификации поверхностей, а именно, дать перечисление всех топологически различных типов замкнутых неориентируемых поверхностей. Обозначим через  $N_q$  поверхность, получающуюся из сферы вырезыванием в ней  $q$  дыр и заклеиванием их всех лентами Мёбиуса. Оказывается, что *поверхности*

$$N_1, N_2, \dots, N_q, \dots \quad (12)$$

*и дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей.*

### Задачи

81. Докажите, что если в поверхности  $N_q$  вырезать круглую дыру, то получающаяся поверхность с краем может быть расположена в трехмерном пространстве без самопересечений.

Указания: получающаяся поверхность гомеоморфна рассмотренной в задаче 62.

82. Докажите, что эйлерова характеристика поверхности  $N_q$  равна  $2 - q$ .

83. На сфере вырезаны  $m + n + p$  дыр;  $m$  из них заклеены ручками, а  $n$  — лентами Мёбиуса. Докажите, что эйлерова характеристика получившейся поверхности с краем равна  $2 - 2m - n - p$ .

84. Докажите, что граф «4 домика и 4 колодца» (ребрами которого являются соединяющие тропинки — по одной от каждого домика к каждому колодцу) не может быть размещен без самопересечений на проективной плоскости, но может быть расположен на торе.

85. На поверхности  $Q$  удалось начертить граф « $m$  домиков и  $n$  колодцев». Докажите, что  $\chi(Q) \leq m + n - \frac{mn}{2}$ .

86. Какой из поверхностей (12) гомеоморфна бутылка Клейна? Проективная плоскость?

87. Какие поверхности получаются, если на рис. 84, а, б, в, г склеить (с учетом направлений) стороны, помеченные одинаковыми буквами?

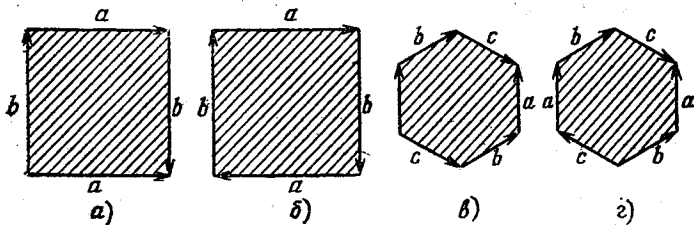


Рис. 84.

88. В трехмерном пространстве  $R^3$  взята лента Мёбиуса, а в четырехмерном пространстве  $R^4$ , содержащем  $R^3$ , взята точка  $p \notin R^3$ . К ленте Мёбиуса добавлены все прямолинейные отрезки, соединяющие  $p$  с точками, лежащими на крае ленты Мёбиуса. Докажите, что получившаяся поверхность гомеоморфна проективной плоскости. Докажите, что любая поверхность  $N_p$  может быть расположена в  $R^4$  без самопересечений.

Поверхности (12) попарно не гомеоморфны, так как имеют различные эйлеровы характеристики (задача 82). Поэтому для доказательства того, что поверхности (12) дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей, остается установить, что каждая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (12). Это доказывается точно так же, как и в пункте 12. Разница будет, во-первых, в том, что лента  $L$  (см. рис. 70) теперь может оказаться гомеоморфной ленте Мёбиуса (поскольку рассматриваются неориентируемые поверхности). В этом случае поверхность  $Q_i^*$ , получившаяся после вырезания полосы  $L$ , будет иметь одну новую компоненту края (так как край полосы  $L$ , т. е. ленты Мёбиуса, гомео-

морфен окружности). Наоборот,  $Q_{i+1}$  получается из  $Q_i^*$  приклеиванием полоски  $L$  к одному из контуров, принадлежащих краю поверхности  $Q_i^*$ , т. е.  $Q_{i-1}$  получается из  $Q_i^*$  заклеиванием одной дыры лентой Мёбиуса. Во-вторых, разница будет в том, что склеивание контуров  $l_1$  и  $l_2$  на рис. 72—73 теперь может производиться с учетом не обязательно противоположной ориентации на них (что равносильно вклеиванию ручки, рис. 75), но, возможно, с учетом одинаковой ориентации контуров. В этом случае поверхность  $Q_{i-1}$  получается из  $Q_i^*$  заклеиванием двух дыр лентами Мёбиуса (задача 89). Таким образом, рассуждение, проведенное в пункте 12, показывает, что любая замкнутая неориентируемая поверхность  $Q$  получается из сферы вырезанием  $k + q$  дыр и заклеиванием  $k$  дыр ручками, а  $q$  дыр — лентами Мёбиуса. При этом  $q \geq 1$ , так как при  $q = 0$  мы получили бы ориентируемую поверхность  $P_k$ , а по условию поверхность  $Q$  была неориентируемой. Остается заметить, что если в поверхность вклеена хотя бы одна лента Мёбиуса, то вклеивание ручки равносильно вклеиванию двух лент Мёбиуса (задача 90). Поэтому поверхность  $Q$ , получающаяся из сферы вырезанием  $k + q$  дыр и вклеиванием  $k$  ручек и  $q$  лент Мёбиуса (где  $q \geq 1$ ), гомеоморфна сфере, в которой вырезаны  $2k + q$  дыр и все они заклеены лентами Мёбиуса. Иначе говоря,  $Q$  гомеоморфна одной из поверхностей (12).

### Задачи

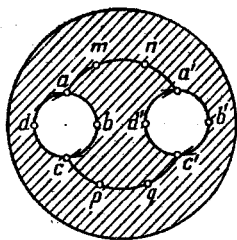
89. В круге вырезаны две дыры, и их контуры  $l_1, l_2$  склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Докажите, что это эквивалентно заклеиванию обеих дыр лентами Мёбиуса.

Указание. Произведем дополнительные разрезы по линиям  $at_1a'$ ,  $cr_1c'$  (рис. 85, а) и перевернем «наизнанку» отрезанный кусок (рис. 85, б). Теперь склеивание контуров  $l_1$  и  $l_2$  осуществляется непосредственно (рис. 85, в) и остается вновь склеить проведенные разрезы, т. е. склеить «диаметрально противоположные» точки на двух контурах.

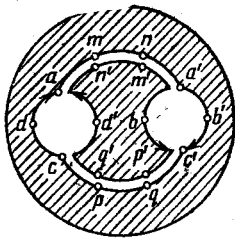
90. В круге вырезаны три дыры и одна из них заклеена лентой Мёбиуса, а контуры двух других дыр склеены с учетом противоположной ориентации на них (ручка). Докажите, что это равносильно заклеиванию всех трех дыр лентами Мёбиуса.

Указание. Проведем дополнительный разрез  $tabt_2$ , а затем вывернем отрезанный кусок «наизнанку» (рис. 86). Мы получаем «серповидную» дыру, на контуре которой склеиваются каждые две «диаметрально противоположные» точки, и еще два контура, которые надо склеить с учетом одинаковой ориентации на них.

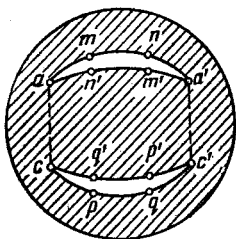
91. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации неориентируемых поверхностей с краем.



a)

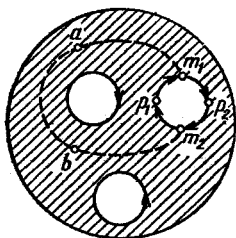


б)

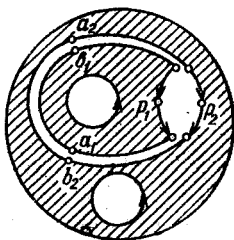


в)

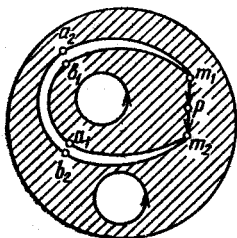
Рис. 85.



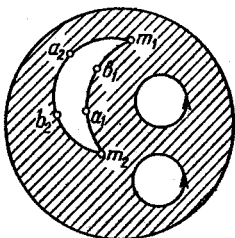
a)



б)



в)



г)

Рис. 86.