14. Векторные поля на поверхностях

Вопрос, который рассматривается в этом пункте, заключается в следующем. Можно ли на заданной ориентируемой поверхности Q построить непрерывное поле направлений, т. е. выбрать в каждой ее точке такой ненулевой касателвный вектор, что при переходе от точки к точке вектор меняется непрерывно?

Пример 28. На сфере направление с севера на юг (рис. 87, *а*) имеет особые точки в полюсах; в этих точках

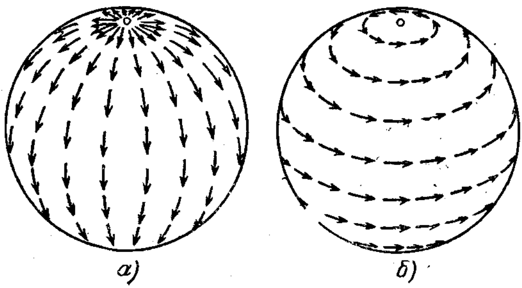

Рис. 87.

векторы направлены в разные стороны и непрерывность нарушается. То же можно сказать о направлении с запада на восток (рис. 87, *б*). Вообще, как мы увидим дальше, на всей сфере не существует непрерывного поля направлений. Это иногда формулируют в виде «теоремы о еже»: если из каждой точки поверхности сферы растет «колючка» (ненулевой вектор, не обязательно касающийся сферы) и направления «колючек» от точки к точке меняются непрерывно, то найдется хотя бы одна «колючка», перпендикулярная к сфере. Действительно, в противном случае, спроектировав каждую «колючку» $\overrightarrow{aq}$ на касательную плоскость, проведенную в точке a, из которой эта «колючка» растет (рис. 88), мы получили бы на всей сфере непрерывное поле ненулевых касательных векторов, а это невозможно.

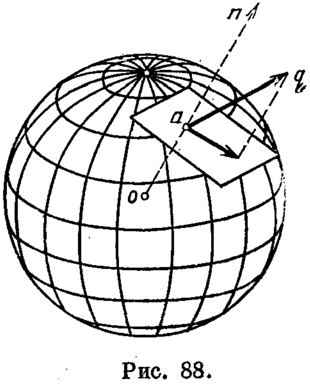

Рис. 88.

На рис. 89, *а*, *б* показан вид векторных полей, рассмотренных в примере 28, вблизи северного полюса, а на рис. 89, *в* — более сложная особая точка (так называемое *седло*). Когда мы один раз обойдем особую точку (например, против часовой стрелки), направления векторов совершат в случаях, изображенных на рис. 89, *а*) и *б*) один

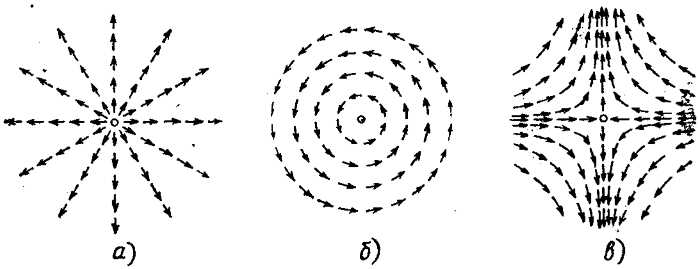

Рис. 89.

поворот в том же направлении (рис. 90, *а*, *б*), а в случае рис. 89, *в*) — один поворот, но уже в противоположном направлении (рис. 90, *в*). В связи с этим говорят, что особая точка на рис. 89, *а* (и на

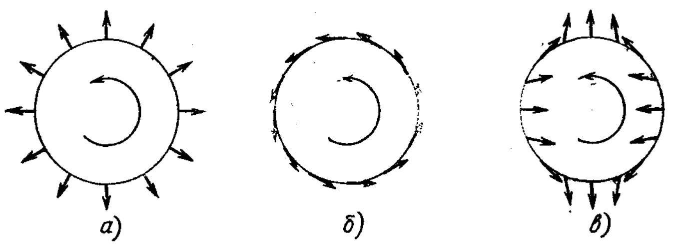

Рис. 90.

рис. 89, *б*) имеет индекс $+1$, а особая точка на рис. 89, *в* — индекс -1.

Выдающийся французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912) доказал, что *если на замкнутой ориентируемой поверхности Q задано поле ненулевых касательных векторов, непрерывное всюду, кроме конечного числа особых точек, то сумма индексов всех особых точек равна $\chi(Q)$.*

Пример 29. Так как $\chi(P_k) = 2 - 2k$, то $\chi(P_k) \neq 0$ при $k \neq 1$. Следовательно, на ориентируемой поверхности, отличной от тора P_1, не существует непрерывного поля ненулевых касательных векторов без особых точек. На торе же векторное поле существует (например, можно взять векторы, направленные вдоль параллелей).

Доказательство теоремы Пуанкаре проведем в два этапа: сначала докажем, что для л ю б ы х двух векторных полей сумма индексов одинакова, а затем построим поле, для которого эту сумму легко вычислить.

Пусть на поверхности Q заданы два ненулевых векторных поля с конечным числом особых точек. Вектор первого поля в точке x обозначим через $v_1(x)$, а вектор второго поля — через $v_2(x)$. Разобьем Q на маленькие многоугольники так, чтобы в каждом многоугольнике было не более одной особой точки каждого поля и все особые точки лежали в н у т р и многоугольников.

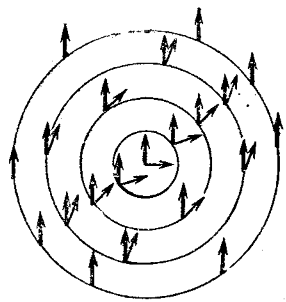

Рис. 91.

Заметим, что если x не является особой точкой поля v_1, то вблизи точки x мы можем п о в е р н у т ь векторы этого поля, оставляя его непрерывным (рис. 91: по мере увеличения радиуса окружности векторы поворачиваются все меньше). Пользуясь этим, повернем векторы поля v_1 вблизи вершин таким образом, чтобы в каждой вершине x_0 векторы $v_1(x_0)$ и $v_2(x_0)$ с о в п а л и (рис. 92).

Так как поверхность Q ориентируема, то на ней можно указать положительное направление отсчета углов (скажем, против часовой стрелки, если смотреть на поверхность с внешней стороны).

Возьмем теперь некоторое ребро r_1 (рис. 92) и выберем на нем направление (например, от вершины a к b). Будем сначала, двигаясь от a к b в этом направлении, следить за вектором $v_1(x)$, а потом, возвращаясь от b к a, следить за вектором $v_2(x)$. Когда мы пробежим ребро r_1 туда и обратно, вектор, за которым мы следим, непрерывно перемещаясь, вернется к прежнему положению (поскольку $v_1(a) = v_2(a)$ и $v_1(b) = v_2(b)$). Число оборотов, которое совершает этот вектор (учитывая выбранное направление отсчета углов), обозначим через $d(r_1)$. На рис. 92 имеем $d(r_1) = 1$, $d(r_2) = 0$, $d(r_3) = -1$. Заметим, что если на ребре r_1 взять противоположное направление (от b к a), то $d(r_1)$ изменит знак (так как вектор, за которым мы следим, будет поворачиваться в обратном направлении).

Пусть M — один из многоугольников. Когда мы обойдем его контур (в положительном направлении), вектор $v_1(x)$ совершит некоторое число оборотов — обозначим это число через $z_1(M)$,— а вектор $v_2(x)$ совершит $z_2(M)$ оборотов.

Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_k$ стороны многоугольника M и зададим на них направления, соответствующие положительному обходу его контура (см. рис. 92). Обойдем

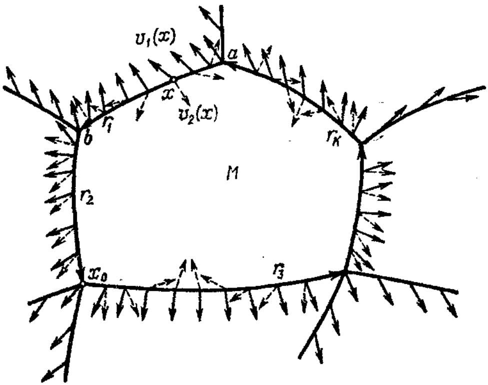

Рис. 92.

контур (начиная от точки a) в положительном направлении, следя за вектором $v_1(x)$, а затем (после возвращения в a) обойдем контур в противоположном направлении, наблюдая за вектором $v_2(x)$. В результате наблюдаемый вектор совершит $z_1(M) - z_2(M)$ оборотов. Но мы можем следить за поворотами векторов «по частям»: наблюдая $v_1(x)$ при движении по ребру r_1 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_1; далее, наблюдая $v_1(x)$ при прохождении ребра r_2 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_2 и т. д. В этом случае мы насчитаем $d(r_1) + d(r_2) + \ldots + d(r_k)$ оборотов. Так как суммарный поворот не зависит от того, в каком порядке складывать углы поворота вектора на каждом из ребер, то

$$z_1(M) - z_2(M) = d(r_1) + d(r_2) + \ldots + d(r_k). \quad (13)$$

Из формулы (13) нетрудно вывести соотношение

$$\sum z_1(M) = \sum z_2(M), \quad (14)$$

в котором суммирование производится по *всем* многоугольникам. В самом деле, просуммируем равенства (13) по всем многоугольникам. В правой части получившейся суммы каждое ребро r встретится *дважды*, так как к нему примыкают два многоугольника M_1 и M_2 (рис. 93). Но при положительном обходе контура M_1 ребро r получит одно направление, а при положительном

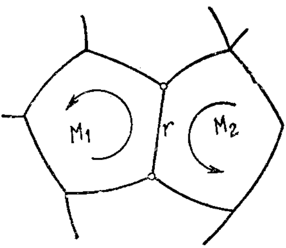

Рис. 93.

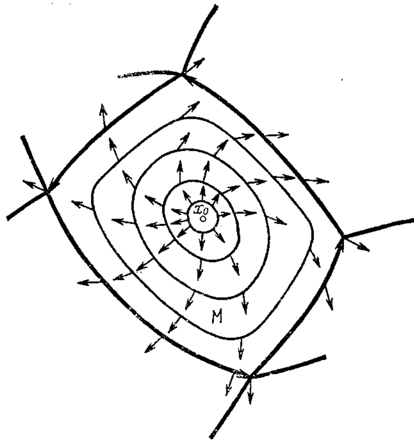

Рис. 94.

обходе контура M_2 — *противоположное* направление. Следовательно, в правой части один раз встретится $d(r)$, а второй раз $-d(r)$. Так как это произойдет с каждым ребром, то $\sum z_1(M) - \sum z_2(M) = 0$.

Пусть M — некоторый многоугольник и x_0 — особая точка поля $v_1(x)$, расположенная в нем. Построим систему простых замкнутых линий, соединяющую контур многоугольника M с окружностью, обходящей точку x_0 (рис. 94). При переходе от одной линии к близкой ей число оборотов вектора $v_1(x)$ должно измениться *мало*, поскольку поле $v_1(x)$ непрерывно. Но число оборотов является *целым* и потому «мало» измениться не может, т. е. остается *постоянным* при переходе от линии к линии. Но при обходе по контуру многоугольника M число оборотов равно $z_1(M)$, а при обходе по окружности вокруг точки x_0 получается индекс этой точки. Таким образом, число $z_1(M)$ *равно* индексу особой точки x_0 (если внутри M нет особых точек, то $z_1(M) = 0$). Из этого вытекает, что число $\sum z_1(M)$ равно сумме индексов *всех* особых точек поля $v_1(x)$. Аналогично, число $\sum z_2(M)$ равно сумме индексов поля $v_2(x)$. Из этого в силу (14) вытекает, что *у обоих полей сумма индексов одинакова.* Этим завершен первый этап.

Выберем теперь внутри каждого многоугольника «центр», а на каждом ребре — «середину», и построим векторное поле, как показано на рис. 95: вдоль ребер векторы направлены от вершин к «середине», из вершин

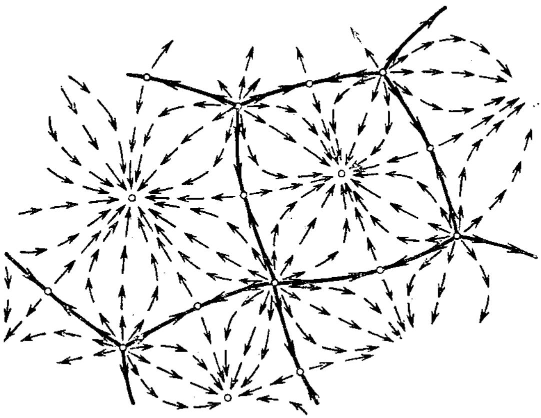

Рис. 95.

Рис. 96.

векторы выходят, а к «центрам» многоугольников приходят. Особыми точками этого поля на поверхности Q будут вершины, «середины» и «центры». При этом (рис. 96) индекс каждой особой точки в вершине и в «центре» равен $+1$, а индекс «середины» ребра равен -1 (седло). Следовательно, для этого поля (а потому и для любого другого) сумма индексов всех особых точек равна $\text{В}\cdot(+1)+\text{Р}\cdot(-1)+\text{Г}\cdot(+1)=\chi(Q)$.

Задачи

92. Докажите, что на всякой замкнутой поверхности существует векторное поле с единственной особой точкой.

93. Докажите, что на всякой поверхности с краем существует векторное поле без особых точек (направление векторов в точках края должно касаться поверхности, но может не быть касательным к краю).

94. Докажите, что теорема Пуанкаре остается справедливой для ориентируемой поверхности с краем, *если* в каждой точке края вектор направлен по касательной к этому краю.

95. Докажите теорему Брауэра: *если* $f\colon K \to K$ — *произвольное непрерывное отображение круга K в себя, то существует (хотя бы одна) неподвижная точка, т. е. такая точка $x \in K$, которая переходит при отображении f в себя:* $f(x) = x$.

Указание. Если бы неподвижных точек не было, то, построив векторы, идущие из каждой точки x в точку $f(x)$, мы получили бы ненулевое непрерывное векторное поле без особенностей.