ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ

1. Идея непрерывности

В основе, в истоках каждого отдела математики можно видеть основную идею, которая пронизывает всё его здание и определяет его лицо. Основной идеей топологии является идея *непрерывности*. Она встречается уже в математическом анализе, но, подчиненная другим идеям анализа, не получает там заметного развития. Свое полное и всестороннее развитие идея непрерывности получает в топологии. Приведем два примера применения этой идеи.

Пример 1. Покажем, что кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

с произвольными действительными коэффициентами a, b, c имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Запишем уравнение (1) (при $x \neq 0$) в виде

$$x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = 0. \tag{2}$$

При очень большом $|x|$ слагаемые $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x^2}$, $\frac{c}{x^3}$ очень малы по модулю, а выражение в скобках мало отличается от единицы и потому положительно. Следовательно, при очень большом $|x|$ левая часть уравнения (2) имеет тот же знак, что и x^3, т. е. тот же знак, что и x. Иначе говоря, при большом отрицательном x (точка x_0 на рис. 1) левая часть уравнения (1) отрицательна, а при большом положительном x (точка x_1) она положительна. Так как график является *непрерывной кривой*, то, переходя с одной стороны оси абсцисс на

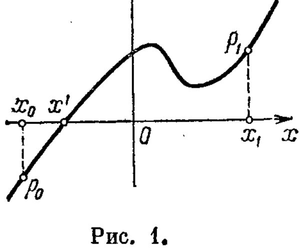

Рис. 1.

другую (из точки p_0 в точку p_1), он пересечет эту ось хотя бы в одной точке. Точка x' пересечения графика с осью абсцисс и дает корень уравнения (1).

Задачи

1. Докажите, что всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

2. Докажите, что если в уравнении (1) свободный член c отрицателен, то это уравнение имеет хотя бы один положительный корень.

Пример 2. Покажем, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать квадрат.

Проведем две параллельные прямые l, l' так, чтобы кривая K была расположена в полосе между ними, и будем перемещать сначала прямую l, а затем l' параллельно

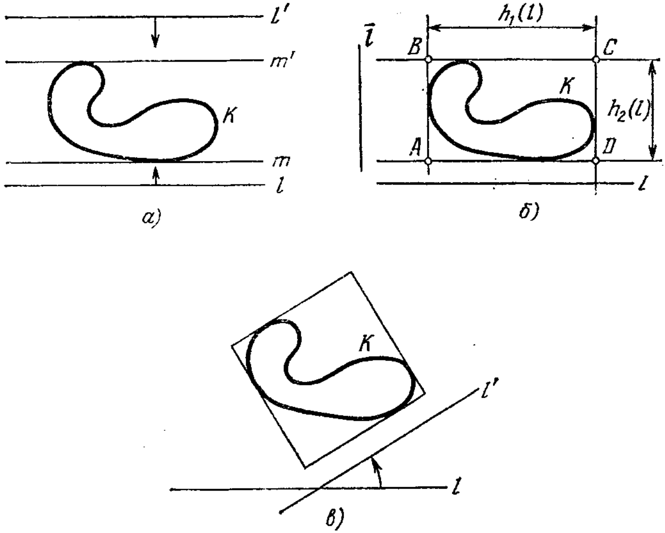

Рис. 2.

себе, до тех пор, пока они не коснутся кривой K. Полученные прямые m, m' (рис. 2, *а*) называются параллельными между собой *опорными прямыми* линии K. Проведем еще две опорные прямые, перпендикулярные l (рис. 2, *б*). Мы получим описанный вокруг линии K прямоугольник $ABCD$. Докажем, что при некотором направлении прямой l прямоугольник $ABCD$ превратится в квадрат.

Обозначим длину стороны AD, параллельной l, через $h_1(l)$, а длину стороны AB, перпендикулярной l,— через

$h_2(l)$. Описанный прямоугольник будет квадратом при $h_1(l) - h_2(l) = 0$.

Пусть $\bar{l}$ — прямая, перпендикулярная l. Описанный прямоугольник со сторонами, параллельными и перпендикулярными $\bar{l}$, совпадает с тем же прямоугольником $ABCD$, но параллельной $\bar{l}$ является сторона AB, а перпендикулярной $\bar{l}$ — сторона AD, т. е. $h_1(\bar{l}) = |AB| = h_2(l)$, $h_2(\bar{l}) = |AD| = h_1(l)$. Таким образом,

$$h_1(\bar{l}) - h_2(\bar{l}) = -(h_1(l) - h_2(l)). \tag{3}$$

Будем теперь поворачивать прямую l, пока она не совпадет с $\bar{l}$. При этом описанный прямоугольник будет плавно меняться, а разность $h_1(l) - h_2(l)$ будет непрерывно зависеть от l. Но при переходе от l к $\bar{l}$ эта разность меняет знак (см. (3)). Следовательно, при своем непрерывном изменении она (при некотором положении прямой l) обращается в нуль, т. е. описанный прямоугольник превращается в квадрат (рис. 2, *в*).

Задачи

3. Докажите, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать ромб с углом 60°.

4. Докажите, что если диаметр плоской фигуры не превосходит d (т. е. расстояние между любыми ее точками не больше d), то существует правильный шестиугольник, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d.

5. Докажите, что если диаметр пространственной фигуры не превосходит d, то существует правильный октаэдр, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными гранями равно d.

В топологии рассматриваются функции наиболее общего вида. Задать функцию — это значит каждой точке x некоторого множества A (*области определения* функции) поставить в соответствие определенную точку $f(x)$ некоторого другого множества B. Говорят в этом случае также, что задано *отображение* f множества A в множество B. Кратко это записывают в виде $f: A \to B$.

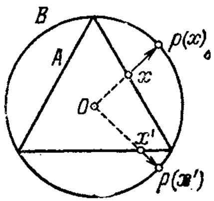

Рис. 3.

Пример 3. Обозначим через A контур равностороннего треугольника, а через B — описанную вокруг него окружность (рис. 3). Тогда *центральное проектирование* p точек множества A на окружность является отображением $p: A \to B$.

Функция f: $A \to B$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in A$, если для x, «мало» отличающихся от x_0, значения $f(x)$ и $f(x_0)$ тоже «мало» отличаются друг от друга.

Более точно, *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого x, отстоящего от x_0 менее чем на δ, соответствующее значение $f(x)$ отстоит от $f(x_0)$ менее чем на ε*. Это определение имеет смысл, если и в множестве A, и в множестве B определено *расстояние* между точками.

Чтобы яснее понять, что такое непрерывность отображения, рассмотрим пример разрыва, т. е. нарушения непрерывности отображения. Возьмем обычную резинку, которую применяют в аптеке для упаковки лекарств. Она имеет форму окружности. Будем ее осторожно деформировать, и вдруг она в некоторой своей точке a разорвется. Что это значит? Некоторая ее часть B (рис. 4, a),

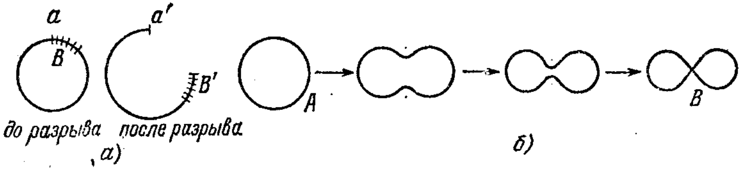

Рис. 4.

которая была «близка» к a (т. е. находилась от нее на нулевом расстоянии), после разрыва (теперь ее обозначим через B') оказывается вовсе не близкой к a' (новое положение точки a). Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B фигуры, бывшая раньше близкой к a (пишем: $B\delta a$), становится неблизкой к новому положению a' точки a.

Теперь понятно следующее определение:

Отображение f: $x \to x'$ называется непрерывным в точке a, если всякая часть B отображаемой фигуры, бывшая близкой к a (т. е. $B\delta a$), после отображения переходит в положение B', близкое к точке $a' = f(a)$ (т. е. $B'\delta a'$).

Можно доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше определению.

Если отображение f: $A \to B$ непрерывно в каждой точке x_0 множества A, то говорят просто, что отображение f *непрерывно*. Наглядно непрерывность отображения можно себе представить, сказав, что «близкие» точки множества A переходят в «близкие» точки множества B, т. е. при отображении f не происходит разрывов, нарушения цельности множества A. Заметим, что при этом различные точки множества A могут образовывать «спайки» (рис. 4, $б$), «складки» и т. п.

Задачи

6. Докажите, что отображение, рассмотренное в примере 3, непрерывно.

7. Для произвольного действительного a обозначим через $f(a)$ наибольший из корней уравнения $x^3 - 3x + a = 0$. Является ли функция $f(x)$ непрерывной?