15. Проблема четырех красок

Области, на которые конечный граф G разбивает плоскость, назовем «странами». На рис. 97 страны А и Б пограничны (примыкают друг к другу по общему ребру). Страны Б и В также пограничны (у них даже два общих ребра). Страны А и В не являются пограничными: хотя у них есть общая точка (вершина), но нет общих ребер.

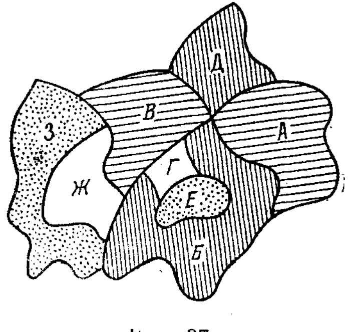

Рис. 97.

Мы хотим раскрасить страны в разные цвета, чтобы получилась «политическая карта». Разумеется, чтобы страны были хорошо видны, необходимо пограничные страны окрашивать в разные цвета. Однако в целях экономии количества красок разрешается непограничные страны окрашивать одним цветом. Какое минимальное количество красок нужно иметь, чтобы можно было раскрасить любую карту на плоскости?

Эта задача была сформулирована в 1852 году лондонским студентом Гутри, который обнаружил, что для различения графств на карте Англии достаточно четырех красок, и выдвинул гипотезу о том, что четырех цветов достаточно для раскраски любой карты. Спустя почти сорок лет английский математик Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в **пять** цветов. Постепенно проблема четырех красок приобретала все больший интерес. В 1968 году Оре и Стемпл доказали, что любую карту, имеющую *не более 40 стран*, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время считается, что справедливость гипотезы четырех красок установлена. Слово «считается» употреблено в связи с тем, что известные сейчас решения этой проблемы базируются на применении ЭВМ и связаны с выполнением огромного, необозримого количества вычислений, причем **проверка** правильности вычислений практически невыполнима. Первое «машинное» решение было получено в 1976 году американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном. С помощью машины (которая «помогала» им постепенно усовершенствовать первоначальную программу) они разбили все возможные карты на почти 2000 (четко указанных) типов и составили машинную программу их исследования. Для каждого из этих типов *) машина решала (по составленной программе) задачу: *может ли в рассматриваемом типе карт найтись такая, которая не раскрашивается в четыре цвета*? Когда, выполнив десятки миллиардов арифметических и логических операций, машина давала ответ «Нет», переходили к следующему типу карт и т. д. Получив ответ «Нет» для всех типов карт, Аппель и Хакен объявили, что ими получено машинное решение проблемы четырех красок.

Однако гарантии в правильности этого «машинного» решения все же нет. Ведь в каком-то (скажем, семнадцатом) типе карт машина могла ответить «Нет» не в результате безупречного анализа, а из-за мимолетного сбоя в электронной схеме (что бывает нередко). Не зная об этом, вычислители переходят к восемнадцатому, девятнадцатому ... типу карт, фактически **пропустив** исследование семнадцатого типа. Не будет гарантии в правильности решения даже в том случае, если мы, затратив много месяцев, повторим уникальный машинный эксперимент: может быть, где-то в многомиллиардной цепочке вычислений, связанных с тем же семнадцатым типом, и в нашей машине произойдет сбой?

Новое машинное решение было предложено в 1978 году Д Коэном. Число типов карт было у него сущест-

*) Кроме трех, которые были исследованы «вручную», поскольку машина с ними не справилась.

венно меньшим, причем результат машинных вычислений по каждому типу и подтипу он получал не в виде готового «Нет», а в форме, допускающей «ручную» проверку. Его не интересовало, каким путем шла машина при исследовании данного подтипа и сколько операций это потребовало; исследование подтипа считалось завершенным, когда машина находила достаточно короткий путь проверки окончательного «Нет». Решение проблемы четырех красок, найденное Коэном, изложено в книге среднего объема и формата. По его мнению, проверка этого решения может быть, при желании, выполнена вручную одним человеком в течение двух-трех лет (!) ежедневной восьмичасовой работы. Однако «скептики» считают, что и это решение малоприемлемо: вряд ли человек, занимавшийся с утра до вечера в течение двух лет нудным перебором вариантов, может гарантировать, что он нигде не допустил ни одной ошибки.

Задачи

96. На плоскости (или на сфере) начерчен граф, все вершины которого имеют четные индексы. Докажите, что получившаяся карта может быть раскрашена в два цвета.

Указание: воспользуйтесь понятием индекса пересечения.

97. Докажите, что для раскраски любой карты на плоскости (или на сфере) достаточно пяти цветов.

98. На некоторой поверхности начерчен такой граф, что из каждых двух пограничных стран хотя бы одна является треугольником. Докажите, что эту карту можно раскрасить в четыре цвета.

99. Проведено n «перегородок», идущих от одной из концентрических окружностей к другой. Сколько нужно цветов для раскрашивания получившейся карты?