16. Раскрашивание карт на поверхностях

Пример 30. Хивуд доказал, что *любую карту на торе можно раскрасить семью красками* (это вытекает из доказываемого ниже неравенства (16)). Он привел также пример, показывающий, что меньше, чем семью цветами, обойтись нельзя. При склеивании противоположных сторон прямоугольник (рис. 98) превращается в тор с семью странами на нем (рис. 99). Каждые две страны пограничны, т. е. все семь стран должны быть раскрашены в разные цвета.

Если любая карта на поверхности Q допускает раскраску в n цветов, но существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим числом цветов, то n называется *хроматическим числом* поверхности Q; оно обозначается через col (Q). Для сферы и тора имеем, согласно сказанному выше, col $(P_0) = 4$, col $(P_1) = 7$. Вообще, для произвольной замкнутой поверхности Q, отличной от бутылки Клейна N_2, хроматическое число дается *формулой Хивуда*:

$$\operatorname{col}(Q) = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}}{2}\right], \tag{15}$$

где квадратные скобки означают *целую часть*, а для бутылки Клейна имеем col $(N_2) = 6$.

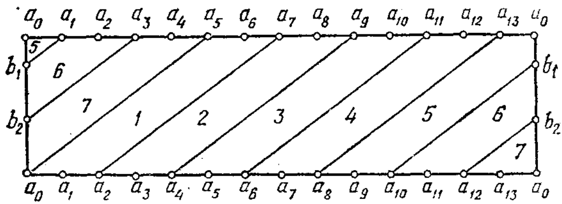


Рис. 98.

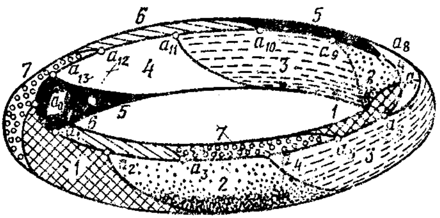


Рис. 99.

Эти результаты получены усилиями нескольких поколений математиков. Хивуду принадлежит доказательство неравенства

$$\operatorname{col}(Q) \leqslant \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(Q)}}{2}\right]. \tag{16}$$

Оставалось установить, что на поверхности Q, отличной от бутылки Клейна, существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим, чем указано в (15), числом цветов. Вначале такие карты были построены для нескольких первых поверхностей в последовательностях (7), (12). Доказательство существования требуемой карты для любой неориентируемой поверхности было получено Рингелем (1954), а для ориентируемой — Рингелем и Янгсом (1968).

Приведем доказательство неравенства (16). Пусть на поверхности Q начерчена карта, требующая для своей раскраски c цветов, где $c = \mathrm{col}\,(Q)$. Выберем внутри каждой страны точку («столицу»). Для каждых двух пограничных стран проведем по территории этих стран о д н у «железную дорогу», соединяющую их столицы (рис. 100), причем так, чтобы различные «железные

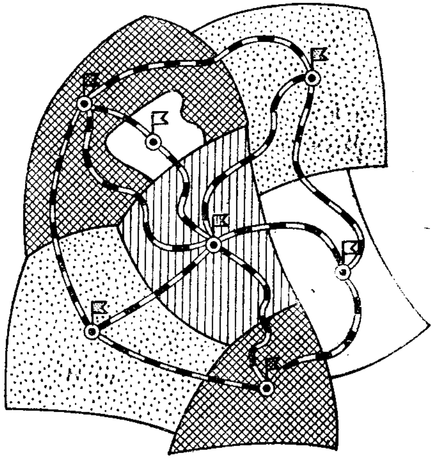


Рис. 100.

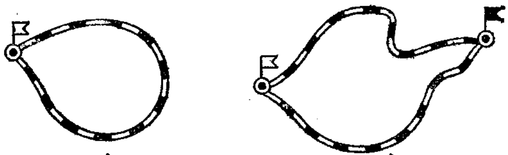
дороги» не пересекались. Вместо окраски страны в некоторый цвет мы можем водрузить в ее «столице» флаг, имеющий этот цвет; если при этом две «столицы» соединены «железной дорогой» (т. е. страны пограничны), то их флаги должны иметь разный цвет. Таким образом, надо «окрасить» вершины графа G^* (ребрами которого являются «железные дороги») таким образом, чтобы любые две с м е ж н ы е вершины (соединенные ребром) имели разный цвет. Ясно, что *хроматическое число* графа G^*, т. е. наименьшее число цветов, требуемых для такой его раскраски, равно c.

Выбросим из G^* некоторую вершину a и все примыкающие к ней ребра. Если при переходе к получившемуся графу G' хроматическое число не уменьшилось, то вместо G^* можно взять более простой граф G'. Возможно, в G' тоже можно провести выбрасывание вершины и т. д.

В конце концов мы получим «неупрощаемый» граф G^{**}, содержащийся в G^*, т. е. хроматическое число графа G^{**} равно c, но выбрасывание л ю б о й вершины графа G^{**} и примыкающих к ней ребер приводит к уменьшению хроматического числа. Число вершин и ребер графа G^{**} обозначим через В и Р, а число областей, на которые этот граф разбивает поверхность Q, — через Г. Тогда (см. задачу 72)

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} \geqslant \chi(Q). \tag{17}$$

К каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c-1$ ребер. В самом деле, допустим, что к вершине



а) *б)*

Рис. 101.

$b \in G^{**}$ примыкает k ребер $[bq_1], \ldots, [bq_k]$, где $k < c-1$. Выбросив из G^{**} вершину b и эти ребра, мы получим граф G'' с м е н ь ш и м, чем c, хроматическим числом. Раскрасим этот граф в $c-1$ цвет. Так как $k < c-1$, то из $c-1$ цвета, в которые окрашен граф G'', хотя бы один цвет н е и с п о л ь з о в а н для окраски вершин $q_1, \ldots, q_k$. Окрасив вершину b в этот неиспользованный цвет, мы получим окраску графа G^{**} в $c-1$ цвет, что, однако, противоречит выбору графа G^{**}.

Итак, к каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c-1$ ребра. Из этого (см. задачу 20) вытекает неравенство

$$(c-1)\,\text{В} \leqslant 2\text{Р}. \tag{18}$$

Далее, каждая из областей, определяемых графом G^{**}, имеет не менее т р е х ребер. Действительно, наличие «одноугольника» (рис. 101, *а*) означало бы существование «железной дороги», идущей из столицы в ту же самую столицу (без захода в другие столицы), а наличие «двуугольника» (рис. 101, *б*) означало бы, что некоторые две «столицы» соединены д в у м я дорогами; но мы таких дорог не проводили.

Пересчитав теперь ребра по всем Г областям, мы насчитаем не менее 3Г ребер; при этом каждое ребро засчитывается дважды (так как к нему примыкают две области). Следовательно, $3Г \leqslant 2Р$, т. е. $\frac{2}{3}Р - Г \geqslant 0$. Прибавляя это неравенство к (17), получаем $В - \frac{1}{3}Р \geqslant \chi(Q)$ или, иначе, $2Р \leqslant 6В - 6\chi(Q)$. Учитывая (18), получаем теперь $(c-1)В \leqslant 6В - 6\chi(Q)$, т. е.

$$c - 1 \leqslant 6 - \frac{6\chi(Q)}{В}, \tag{19}$$

Теперь нетрудно завершить доказательство. Пусть сначала поверхность Q гомеоморфна сфере: $Q = P_0$. Тогда $\chi(Q) = 2$, т. е. доказываемое неравенство (16) принимает вид $\mathrm{col}(Q) \leqslant 4$. Это неравенство справедливо, поскольку проблема четырех красок решена.

Пусть теперь $Q = N_1$, т. е. $\chi(Q) = 1$. Доказываемое неравенство (16) принимает вид $\mathrm{col}(Q) \leqslant 6$. Это неравенство справедливо, так как из (19) следует, что $c - 1 \leqslant 6 - \frac{6}{В}$ и потому $c - 1 \leqslant 5$ (поскольку число $c - 1$ — целое).

Пусть, наконец, Q — замкнутая поверхность, отличная от P_0 и N_1. Тогда $\chi(Q) \leqslant 0$ (задачи 70, 82). Так как $В \geqslant c$ (иначе граф G^{**} можно было бы раскрасить в $c - 1$ цвет), то $-\frac{6\chi(Q)}{В} \leqslant -\frac{6\chi(Q)}{c}$, и потому, согласно (19), $c - 1 \leqslant 6 - \frac{6\chi(Q)}{c}$, т. е. $c^2 - 7c + 6\chi(Q) \leqslant 0$. Это означает, что число c принадлежит отрезку, концами которого являются корни квадратного трехчлена $x^2 - 7x + 6\chi(Q)$ (корни действительны, поскольку $6\chi(Q) \leqslant 0$). Следовательно, c не превосходит большего из этих корней, т. е.

$$c \leqslant \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}\right).$$

Таким образом, неравенство (16) справедливо и в этом случае.

Задачи

100. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k + q$ дыр и заклеиванием k из них ручками. Докажите, что $\mathrm{col}(Q) = \mathrm{col}(P_k)$.

101. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k + q$ дыр и заклеиванием q из них лентами Мёбиуса. Докажите, что $\mathrm{col}(Q) = \mathrm{col}(N_q)$. В частности, хроматическое число ленты Мёбиуса равно 6.

102. Приведите пример карты на проективной плоскости (или на ленте Мёбиуса), которую нельзя раскрасить пятью цветами.

103. Чему равно хроматическое число графа, вершинами и ребрами которого служат вершины и ребра n-угольника?

104. Каково хроматическое число графа «m домиков и n колодцев»?

105. Докажите, что существует граф, не вложимый в заданную поверхность.

106. Граф G с хроматическим числом 2 имеет n вершин. Какое максимальное число ребер может иметь этот граф?

107. Докажите, что если на заданной поверхности начерчена карта с достаточно маленькими странами, то ее можно раскрасить в 7 цветов.

108. Докажите, что если на поверхности Q можно начертить граф, имеющий хроматическое число c, то $\operatorname{col}(Q) \geqslant c$.

109. Докажите, что на бутылке Клейна можно начертить полный граф с шестью вершинами. Выведите отсюда, что $\operatorname{col}(N_2) \geqslant 6$.