17. «Дикая сфера»

Мы рассмотрим здесь вопросы, связанные с **пространственной** теоремой Жордана, но прежде поговорим об *индексе пересечения* в пространстве.

Пусть Q — поверхность (возможно, имеющая край), составленная из плоских многоугольников, и G — граф, ребрами которого являются прямолинейные отрезки. Будем говорить, что G и Q *находятся в общем положении*, если вершины графа не принадлежат Q, а его ребра не имеют общих точек с ребрами поверхности Q. Если при этом число точек пересечения графа с поверхностью *четно*, то будем писать $J(G, Q) = 0$, а если *нечетно*, то $J(G, Q) = 1$. Число $J(G, Q)$ назовем *индексом пересечения* графа G с поверхностью Q.

Как и в п. 5, доказывается, что *если поверхность Q не имеет края, а граф G представляет собой цикл (т. е. в каждой его вершине сходится четное число ребер), то $J(G, Q) = 0$.*

Задачи

110. Условимся говорить, что объединение конечного числа многоугольников в пространстве представляет собой *двумерный цикл* (по модулю 2), если эти многоугольники не имеют общих внутренних точек и к каждому ребру (мы считаем «ребрами» стороны многоугольников) примыкает четное число многоугольников. Докажите, что равенство $J(G, Q) = 0$ остается справедливым, если G — одномерный, а Q — двумерный цикл (по модулю два), причем они находятся в пространстве в общем положении.

111. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2, который будем представлять себе «спаянным» из металлических многоугольников. Докажите, что области, на которые он разбивает пространство, можно «залить жидкостями» двух цветов, так, чтобы к каждому многоугольнику примыкали с двух сторон разные по цвету «жидкости».

112. Докажите, что существует «пространственная карта», требующая для своей раскраски (или «заливки разноцветными жидкостями») не менее 1982 цветов.

113. Конечное множество ориентированных многоугольников в пространстве, которые не имеют общих внутренних точек (но могут иметь общие ребра и вершины), образуют *двумерный целочисленный цикл*, если для каждого направленного ребра число положительно примыкающих к нему многоугольников (M_1 и M_4 на рис. 102) равно числу отрицательно примыкающих (M_2 и M_3 на рис. 102). Докажите, что если G — одномерный целочисленный цикл, а Q — двумерный целочисленный цикл в пространстве, то *их индекс пересечения*

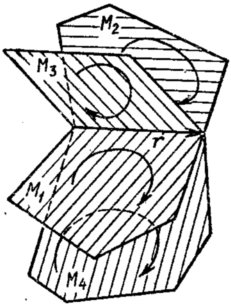

Рис. 102.

$$J(G, Q) = \sum_{i, j} J(r_i, M_j)$$

равен нулю; здесь суммирование распространено на все направленные отрезки $r_1, \ldots, r_k$, составляющие цикл G, и все ориентированные многоугольники $M_1, \ldots, M_l$, составляющие цикл Q, причем $J(r_i, M_j) = +1$ или $J(r_i, M_j) = -1$, в зависимости от того, соответствуют ли ориентации *правилу буравчика* (рис. 103, *а*) или нет (рис. 103, *б*).

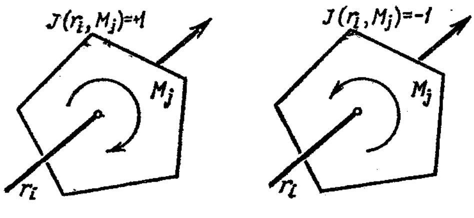

Рис. 103.

114. *Пусть* Q — двумерный целочисленный цикл, p и q — не принадлежащие ему точки. Проведем направленную ломаную x, идущую от точки p к q. Докажите, что индекс пересечения $J(x, Q)$ не зависит от выбора ломаной x, а определяется только точками p и q.

115. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2. Докажите, что его многоугольники можно ориентировать так, чтобы получился целочисленный цикл.

116. Пусть Q — двумерный целочисленный цикл. Докажите, что если существует направленная ломаная x (незамкнутая), для которой $J(x, Q) = n$, то Q разбивает пространство не менее, чем на $n + 1$ областей. Верно ли обратное?

С помощью понятия индекса пересечения по модулю 2 доказывается (примерно так же, как в п. 6) пространственный аналог теоремы Жордана: *всякая замкнутая поверхность Q, расположенная в трехмерном пространстве без самопересечений, разбивает пространство на две области*; одна из них — ограниченная (она называется *внутренней*), а другая (*внешняя*) — неограниченная. Заметим, что (хотя об этом не говорится в формулировке теоремы) поверхность, вложенная в трехмерное пространство без самопересечений, должна быть двусторонней: ведь она разбивает пространство на две области, т. е. имеет «две стороны». Этим подтверждается то, что замкнутая односторонняя поверхность не может быть вложена в трехмерное пространство без самопересечений.

Задачи

117. Из точки c проведен луч l, не встречающий ребер поверхности Q (составленной из плоских многоугольников). Докажите, что c в том и только в том случае принадлежит внутренней области, определяемой поверхностью Q, если луч l пересекает Q в нечетном числе точек.

118. Существует ли в пространстве множество, являющееся совместной границей трех областей?

В конце п. 6, где шла речь о «плоской» теореме Жордана, мы отметили, что объединение простой замкнутой линии и ее внутренней области гомеоморфно кругу. Справедливо ли аналогичное (на первый взгляд столь же «очевидное») пространственное утверждение: «объединение поверхности, гомеоморфной сфере, и ее внутренней области гомеоморфно шару»? Для наиболее простых поверхностей, гомеоморфных сфере (например, для выпуклых многогранников), это, действительно, верно. Однако в общем случае это «очевидное» утверждение неверно — интуиция здесь обманывает нас. Иными словами, *существует в трехмерном пространстве такая поверхность, гомеоморфная сфере, что объединение этой поверхности и ее внутренней области не гомеоморфно шару*. Построение такой «дикой сферы» связано с работами французского математика Антуана и американского математика Александера.

Прежде чем переходить к описанию «дикой сферы», рассмотрим вопрос о *стягиваемости линий*. Пусть l — простая замкнутая линия, расположенная в фигуре M.

Будем говорить, что линия l *стягиваема* в M, если существует поверхность P, гомеоморфная кругу и имеющая l своим краем, которая расположена (возможно, с самопересечениями) в фигуре M. Термин «стягиваемость» связан с тем, что на «круге» P можно начертить систему «концентрических окружностей», по которым l может быть постепенно стянута в точку.

Задачи

119. Докажите, что если M — открытый шар, то в M любая простая замкнутая линия стягиваема.

120. Докажите, что если фигура A состоит из конечного числа точек, то окружность l, расположенная в пространстве вне A, может быть вне A стянута.

Указание. Если взять шар, содержащий l, то, «вдавливая» его, чтобы получались идущие внутрь трубки, можно построить тело, гомеоморфное шару, которое содержит внутри себя линию l, но не содержит точек множества A.

Утверждение, содержащееся в задаче 120, можно пояснить следующим образом. Если l — окружность, не проходящая через точки фигуры A (состоящей из конечного числа точек), то круг, натянутый на l (даже

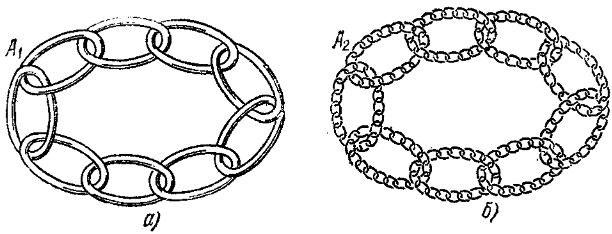

Рис. 104.

если он проходит через некоторые из точек фигуры A), может быть при помощи небольшой деформации «снят» с тех точек фигуры A, через которые он проходил. Может создаться впечатление, что в дополнительном пространстве произвольного нульмерного множества A любая окружность стягиваема. Однако это неверно.

Пример 31. Рассмотрим замкнутую цепь A_1, состоящую из нескольких сцепленных звеньев (рис. 104, *а*). Далее, заменим каждое звено аналогичной замкнутой цепочкой из более мелких звеньев, проходящей внутри прежнего звена. Мы получим множество $A_2 \subset A_1$, состоящее из многих мелких звеньев (рис. 104, *б*). Теперь каждое звено, составляющее множество A_2, заменим замкнутой цепочкой еще более мелких звенышек (располагающейся внутри прежнего звена). Мы получим множество $A_3 \subset A_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \subset \ldots$ Пересечение всех этих множеств представляет собой *антуановское множество* A^*.

Множество A^* *нульмерно.* В самом деле, размеры звенышек, составляющих множество A_n, неограниченно уменьшаются с ростом n, и потому в A^* не существует связных множеств, отличных от точки.

Пусть теперь l_1 — окружность, сквозь которую проходит первоначально взятая цепочка A_1, и K_1 — круг с границей l_1. На рис. 105, *а* круг K_1 пересекает тор T_1, служащий поверхностью одного из звеньев цепи, по двум окружностям (меридианам); одна из них обозначена через l_2. Часть круга K_1, ограниченная линией l_2, представляет собой меньший круг K_2. Этот меньший круг по отношению к части множества A_2, расположенной внутри тора T_1, находится в таком же положении, что и круг K_1 по

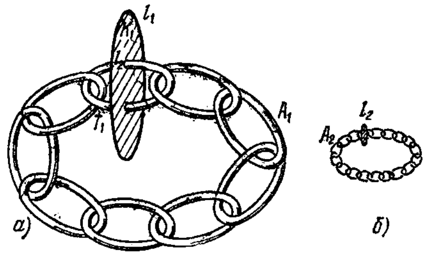

Рис. 105.

отношению ко всему множеству A_1 (рис. 105, *б*). Можно себе представить, что K_2 (а потому и K_1) пересекает один из торов (служащих границами звеньев множества A_2) по двум меридианам; один из них обозначим через l_3 и т. д. Таким образом, круг K_1 («пленка», натянутая на l_1) пересекается и с множеством A_1, и с A_2, и с A_3 и т. д., откуда вытекает, что K_1 пересекается и с предельным множеством A^*. Разумеется, на l_1 можно натянуть не только K_1, но и иную пленку, являющуюся непрерывным образом круга; однако проведенное рассуждение поясняет, что л ю б а я такая пленка пересекается с A^* (путь доказательства этого факта обсуждается в п. 25). Итак, *окружность* l_1 *не стягиваема во внешнем простран-*

стве антуановского множества A^*. Это нульмерное, как бы рассыпающееся на отдельные точки множество «мешает» провести пленку (являющуюся непрерывным образом круга), натянутую на l_1.

Задачи

121. Докажите, что на l_1 можно натянуть пленку, гомеоморфную ручке и расположенную вне A^*.

122. Постройте простую замкнутую линию, проходящую через все точки антуановского множества.

Пример 32. Теперь мы в состоянии дать описание «дикой сферы». Пусть S — сфера, содержащая внутри себя множество A_1 и окружность l_1 (рис. 105, *а*). Продавим сферу S в нескольких местах, чтобы получились трубки, идущие внутрь и подходящие к каждому из торов, ограничивающих множество A_1 (рис. 106). Мы можем это сделать так, чтобы трубки не подходили к окружности l_1. Полученная поверхность S_1 (сфера со вдавленными трубками) гомеоморфна сфере, а ее внутренняя область U_1 гомеоморфна открытому шару, причем линия l_1 лежит внутри U_1. Теперь от концов трубок вдавим внутрь более узкие трубки, идущие внутри торов, ограничивающих множество A_1, и подходящие к звеньям множества A_2. Мы получим поверхность S_2, также гомеоморфную сфере, причем ее внутренняя область U_2 гомеоморфна открытому шару и содержит l_1. Затем мы вдавим еще более узкие трубки, подходящие к звеньям множества A_3, и т. д. На каждом шаге получается поверхность S_n, гомеоморфная сфере, причем ее внутренняя область U_n гомеоморфна открытому шару и содержит l_1. Постепенно трубки становятся все короче, поверхность видоизменяется все меньше, и поэтому предельная поверхность S^* остается гомеоморфной сфере. Так как при этом «щупальцы», выпускаемые поверхностями S_n, все ближе подходят к A^*, то предельная сфера S^* содержит

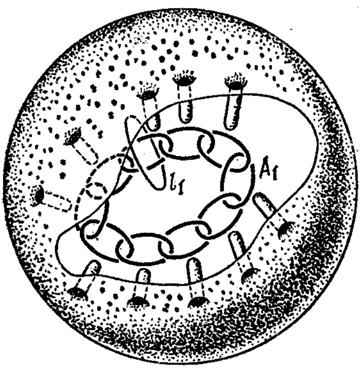

Рис. 106.

множество A^*. Внутренняя область U^* сферы S^* не пересекается с антуановским множеством A^* (поскольку это множество лежит на границе S^* области U^*), т. е. вся область U^* целиком лежит вне A^*. Поэтому окружность l_1, расположенная внутри U^*, не стягиваема в U^* (поскольку линия l_1 не стягиваема вне A^*). Из этого вытекает, что область U^* не гомеоморфна открытому шару (задача 119). Поэтому объединение поверхности S^* и ее внутренней области не гомеоморфно замкнутому шару.