18. Узлы

Если концы «нити», на которой завязан узел, не соединены, то узел можно «развязать». Поэтому в топологии рассматривают узлы только на **з а м к н у т ы х** линиях.

Пример 33. На рис. 107 изображен *простой узел* (иногда его называют также «трилистником»).

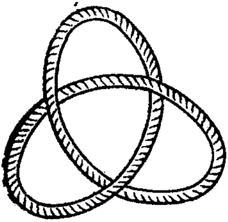
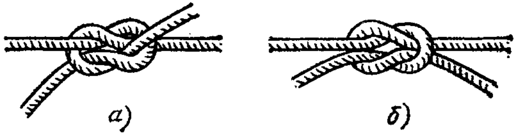
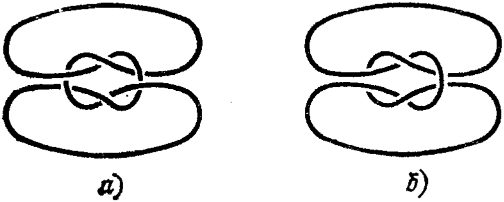


Рис. 107.



а) б)

Рис. 108.

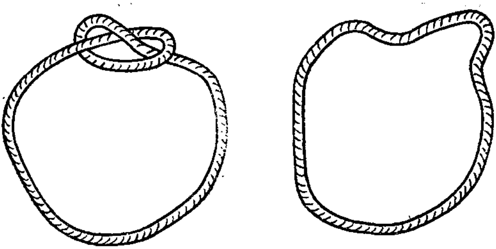


а) б)

Рис. 109.

Пример 34. Обычный двойной узел (рис. 108, *а*) не следует смешивать с так называемым *морским узлом* (рис. 108, *б*); узел на рис. 108, *а* моряки пренебрежительно именуют «бабушкиным» узлом (он легче развязывается). На рис. 109 даны топологические схемы этих узлов.

С топологической точки зрения *узел — это линия в трехмерном пространстве, гомеоморфная окружности.* Разными узлами считаются такие, которые *неизотопны.* Представляется, например, наглядно очевидным, что «заузленная» и «незаузленная» линии на рис. 110

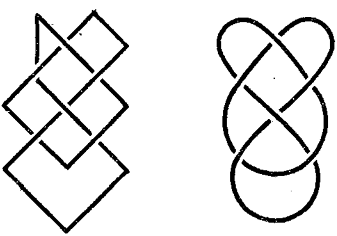


а) *б)*

Рис. 110.

топологически неодинаково расположены (неизотопны). Доказательство этого факта мы рассмотрим позже (в п. 25).

Будем представлять себе узел реализованным в виде простой замкнутой ломаной l в пространстве и спроектируем ее на «горизонтальную» плоскость. Проекция узла l может оказаться пересекающей себя; при этом мы можем предполагать (немного сдвинув, если нужно, некоторые из звеньев), что проекция имеет лишь *двойные* точки пересечения (т. е. проекции никаких трех звеньев не имеют общей точки). Мы условимся на чертежах прерывать то из двух звеньев, пересекающихся на проекции, которое проходит ниже. В результате получится наглядный рисунок, так называемая нормальная проекция узла (рис. 111, *а*). Можно изображать узлы и в виде плавных линий на плоскости (без угловых точек), сохраняя те же соглашения о сплошных и прерванных участках (рис. 111, *б*).



а) *б)*

Рис. 111.

Задачи

123. Докажите, что всякий целочисленный одномерный цикл можно представить в виде объединения нескольких *ориентированных узлов*, т. е. направленных контуров в пространстве, которые могут иметь общие вершины, но других общих точек попарно не имеют.

124. Докажите, что трижды перекрученная лента (рис. 112) гомеоморфна ленте Мёбиуса, а ее край изотопен простому узлу.

125. Докажите, что замысловатая «пряжка», изображенная на рис. 113, гомеоморфна ручке, а ее край изотопен простому узлу.

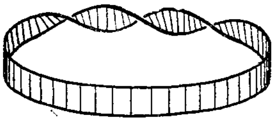


Рис. 112.

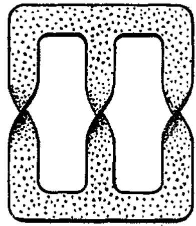
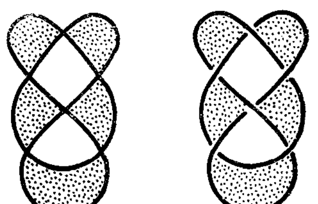


Рис. 113.

126. Докажите, что любая не гомеоморфная кругу поверхность (ориентируемая или неориентируемая), край которой гомеоморфен окружности, может быть так вложена в трехмерное пространство, что ее край будет простым узлом.

В связи с задачами 124—126 возникает вопрос, *для любого ли узла L существует «натянутая на него пленка», т. е. поверхность (без самопересечений), имеющая L своим краем?* Утвердительный ответ на этот вопрос дал Ф. Франкль (советский математик, приехавший к нам в 1934 году из Австрии) при помощи следующего изящного рассуждения. Нормальная проекция узла L разбивает плоскость на области, причем эту «карту» можно раскрасить в два цвета, например, белый и красный. Возможность такой «шахматной» раскраски вытекает из задачи 96, поскольку в каждой вершине получающегося в проекции графа сходятся четыре ребра. Мы можем при этом считать, что наружная (неограниченная) «страна» окрашена в белый цвет; на рис. 114, *а* контур узла показан без перерывов, чтобы ясно были видны «страны». Если теперь вновь наметить на проекции узла L разрывы, как на нормальной проекции, то чертеж станет пространственным, т. е. «красные» области окажутся соединенными с пере-



а) *б)*

Рис. 114.

кручиваниями (рис. 114, *б*). Это и дает требуемую поверхность, имеющую узел L своим краем. Заметим, что получаемая поверхность, вообще говоря, неориентируема (см. рис. 112). Однако более «осторожное» приклеивание стран позволяет для любого узла построить ориентируемую поверхность, имеющую этот узел своим краем (см. задачи 130—132).

Задачи

127. Для каждого из узлов на рис. 115 изобразите указанным способом поверхность, имеющую этот узел своим краем. Какой из поверхностей, P_k или N_q, с вырезанной в ней круглой дырой гомеоморфны эти поверхности?

128. Докажите, что поверхность Франкля в том и только в том случае неориентируема, если существует простая замкнутая линия, проходящая по «красным» областям и нечетное число раз переходящая из страны в страну через двойные точки (рис. 116).

129. Докажите, что если имеется *переплетение*, т. е. объединение нескольких простых замкнутых линий в пространстве (рис. 117), которые попарно не пересекаются друг с другом, то существует связная поверхность без самопересечений, имеющая своим краем это переплетение.

130. Пусть L — переплетение. Выберем на каждой из его линий направление обхода и обозначим через z одномерный целочисленный цикл, являющийся нормальной проекцией переплетения L. Фиксируем во внешней области точку o и каждой стране M, на которые цикл z разбивает плоскость, припишем число $k(M)$, равное индексу пересечения $J(x, z)$, где x — направленная ломаная, идущая от точки o к некоторой внутренней точке страны M (рис. 118). Докажите, что если M_1 — страна, для которой $|k(M)|$ принимает наибольшее значение, то те части цикла z, которые составляют границу страны M_1, имеют направления, образующие обход контура страны M_1 (по или против часовой стрелки).

131. В условиях задачи 130 выбросим из цикла z участки, составляющие контур страны M_1 (с некоторым запасом) и вместо них добавим «перемычки» (пунктир на рис. 119, *а*), в результате чего получится цикл z', имеющий меньшее число стран, чем z. Аналогичное построение проведем и на переплетении L; получится переплетение L', проектирующееся в цикл z'. Выброшенные участки дополним такими же перемычками и натянем на полученный контур поверхность P, гомеоморфную кругу и имеющую вблизи перемычек перекрученные «лопасти» (см. рис. 119, *б*). Докажите, что если на L' натянута ориентируемая пленка Q, то при подклеивании к Q поверхности P (по перемычкам) мы получаем также ориентируемую поверхность, натянутую на цикл z.

132. Пользуясь результатами двух последних задач, докажите, что *если L — переплетение в пространстве, на каждом контуре которого выбрано произвольное направление обхода, то существует такая ориентируемая поверхность, краем которой является переплетение L, что некоторая ее ориентация согласована с направлением обхода на каждой из линий переплетения L.*

Указание. Надо следить за тем, чтобы на каждом шаге построения весь край получающейся поверхности был виден сверху.

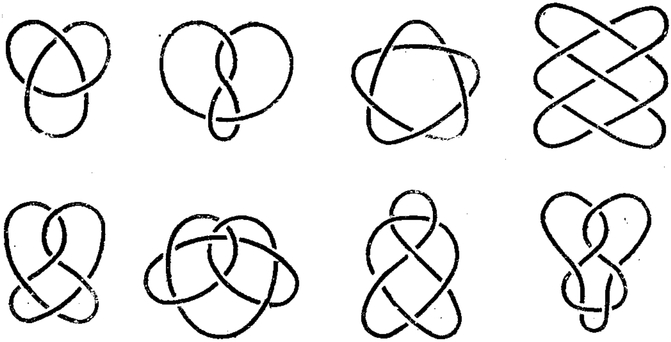


Рис. 115.

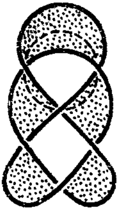


Рис. 116.

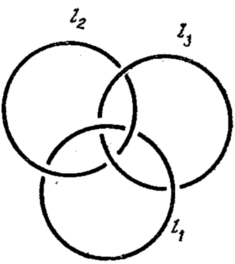


Рис. 117.

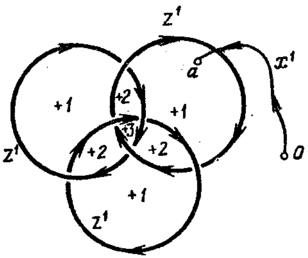


Рис. 118.

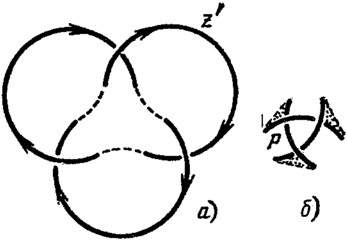


Рис. 119.

133. Докажите, что если для цикла z наибольшее значение числа $|k(M)|$, рассмотренного в задаче 130, равно n, то для поверхности, натянутой на переплетение L по методу задач 130—132, имеем $\chi(Q) \geqslant n - q$, где q — число двойных точек цикла z.

134. Докажите, что если переплетение L содержит l компонент, причем число двойных точек на его нормальной проекции z равно q, а наибольшее значение числа $|k(M)|$ для цикла z равно n, то на это переплетение можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с k ручками, в которой вырезано l круглых дыр, где $k \leqslant 1 + \frac{q - n - l}{2}$.

135. Докажите, что на морской (а также на «бабушкин») узел можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с тремя дырами, две из которых заклеены ручками.