19. Коэффициент зацепления

Для двух не пересекающихся друг с другом ориентированных контуров x, y в пространстве (x — первый контур, y — второй) можно следующим образом определить некоторое целое число, называемое *коэффициентом зацепления* этих контуров. Рассмотрим нормальную проекцию переплетения $x \bigcup y$ на некоторую («горизонтальную») плоскость и пусть a — двойная точка на этой проекции, в которой контур x идет ниже, чем y. Если, двигаясь вблизи a по направлению контура x, мы увидим (в проекции), что y пересекает его слева направо (рис. 120, a), то точке a припишем число $+1$, а если справа налево (рис. 120, $б$), то -1. В остальных

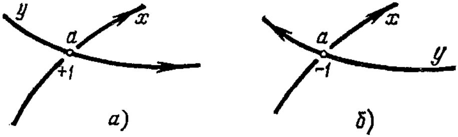
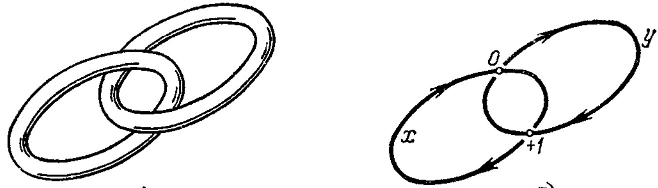


Рис. 120.

случаях (т. е. если пересекаются два участка одного и того же контура или если контур x проходит выше, чем y) двойной точке a припишем число 0. Сумма этих чисел по всем двойным точкам на проекции называется *коэффициентом зацепления* и обозначается через $\mathfrak{w}(x, y)$.

Пример 35. Для двух соседних звеньев обычной металлической цепи (рис. 121, a) коэффициент зацепления равен ± 1 (рис. 121, $б$). Для контуров, изображенных на рис. 122, имеем $\mathfrak{w}(x, y) = 3$.

Как мы увидим дальше, коэффициент зацепления $\mathfrak{w}(x, y)$ зависит лишь от расположения самих контуров x, y, а не от способа проектирования. Далее, если контуры x, y непрерывно деформируются в пространстве (например, движутся, как шарнирные ломаные), оставаясь



а) б)

Рис. 121.

в каждый момент не пересекающимися, то их коэффициент зацепления $\mathfrak{w}(x, y)$ не меняется. Наконец, отметим, что коэффициент зацепления $\mathfrak{w}(x, y)$ является (с точностью до знака) *изотопическим инвариантом.* Иначе говоря, если f — гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, то при этом отображения x, y переходят в такие контуры $f(x)$, $f(y)$, что $\mathfrak{w}(f(x), f(y)) = \pm\, \mathfrak{w}(x, y)$.

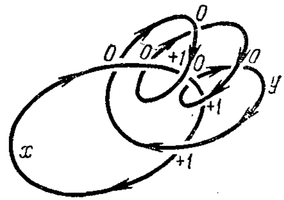


Рис. 122.

Пример 36. В конце п. 2 упоминалось, что хотя дважды перекрученная лента гомеоморфна неперекрученной (см. рис. 8 на с. 13) эти фигуры не изотопны друг другу в пространстве. Теперь мы можем это д о к а з а т ь. В самом деле, коэффициент зацепления краев ленты равен в случае дважды перекрученной ленты ± 1 (в зависимости от того, в какую сторону перекручена лента), а в случае неперекрученной ленты — нулю (рис. 123). Поэтому при гомеоморфном отображении пространства на себя дважды перекрученная лента не может перейти в неперекрученную. Дважды перекрученная лента не может быть превращена в неперекрученную, как бы мы ни деформировали ее (оставляя гомеоморфной себе); ведь при такой деформации края ленты перемещаются, не пересекаясь друг с другом, и потому коэффициент зацепления измениться не может.

Пример 37. Постоянный ток I, протекающий по бесконечному прямолинейному проводу P, создает магнитное поле, напряженность которого на расстоянии r от провода имеет величину $H = \frac{2I}{r}$. Как известно, потенциалом магнитного поля называется работа, которую надо затратить, чтобы из некоторой фиксированной точки x_0 (точки *нулевого потенциала*) переместить магнитный полюс,

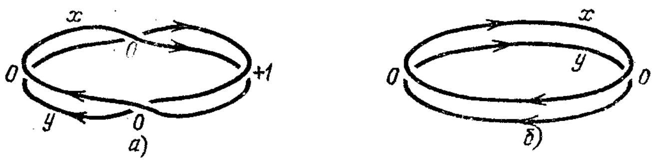


Рис. 123.

равный единице, в заданную точку поля. В рассматриваемом случае потенциал W магнитного поля многозначен. Действительно, если из точки x_0 перемещать магнитный полюс в точку a по двум путям, показанным на рис. 124, a, $б$,

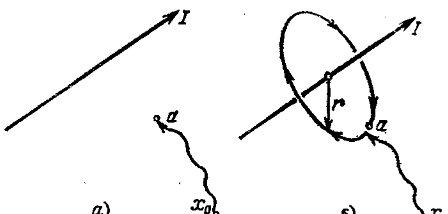


Рис. 124.

то первое перемещение требует дополнительной работы против силы $\frac{2I}{r}$ на пути $2\pi r$, т. е. дополнительной работы, численно равной $4\pi I$. Мы видим, что один обход вокруг провода (не обязательно по окружности — можно идти по любому пути) меняет магнитный потенциал $W(a)$ на величину $4\pi I$. Вообще, после m обходов вокруг провода, где m — целое число (положительное, отрицательное или нуль), потенциал изменится на $4\pi I m$. То же выражение для изменения потенциала справедливо в случае любого (не обязательно прямолинейного) провода (рис. 125). Число обходов («витков») пути z вокруг проводника P равно взятому со знаком минус *коэффициенту за-*

цепления проводника P с путем z, т. е. *при обходе вокруг проводника P по замкнутому пути z магнитный потенциал меняется на величину* $4\pi\, Im$, где $m = -\mathfrak{w}(P, z)$. Величину Im иногда называют «числом ампервитков» (если ток I измеряется в амперах).

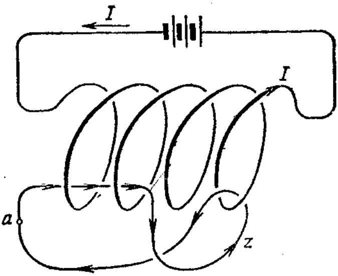


Рис. 125.

Задачи

136. Докажите, что при перестановке контуров их коэффициент зацепления не меняется; $\mathfrak{w}(x, y) = \mathfrak{w}(y, x)$.

137. Направленные контуры x', y' симметричны контурам x, y относительно некоторой плоскости (учитывая направление обхода). Докажите, что $\mathfrak{w}(x', y') = -\mathfrak{w}(x, y)$.

138. Каков коэффициент зацепления края ленты Мёбиуса (см. рис. 50, *г* на с. 44) и его средней линии?

139. Пусть Q — поверхность, гомеоморфная ленте Мёбиуса (рис. 126), x — ее край, а y — «средняя линия» (т. е. образ средней линии ленты Мёбиуса M, изображенного на рис. 50, *г*, при гомеоморфизме $f\colon M \to Q$). Докажите, что число $\mathfrak{w}(x, y)$ нечетно.

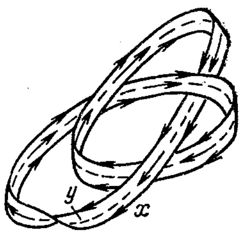


Рис. 126.

Теперь мы дадим другое (эквивалентное) определение коэффициента зацепления. Будем представлять себе контуры x, y лежащими «почти целиком» в плоскости нормальной проекции, так что лишь вблизи двойных точек один из них проходит чуть ниже другого. Далее, рассмотрим ориентированную пленку Q, натянутую на контур y (так, как это было описано в задаче 132: контур y виден целиком, если смотреть на пленку Q сверху), причем будем считать, что эта пленка «провисает», располагаясь вблизи своего края почти вертикально (рис. 127). Тогда в тех двойных точках, в которых контур x идет в ы ш е y, он проходит и выше пленки Q, т. е. не пересекает ее. В тех же точках, где контур x проходит н и ж е y, он пересекает пленку Q; при этом рассматриваемый участок контура x имеет с пленкой Q индекс пересечения $+1$, если, глядя по направлению линии x, мы видим, что линия y пересекает ее с л е в а н а п р а в о (рис. 128, *а*) и -1, если пересечение происходит с п р а в а н а л е в о (рис. 128, *б*). Из этого следует (если сравнить определение коэффициента зацепления и индекса пересечения), что *справедливо равенство*

$$\mathfrak{w}(x,\ y) = J\ (x,\ Q), \tag{20}$$

где Q — двумерная ориентируемая пленка, натянутая на контур y и согласованно с ним ориентированная.

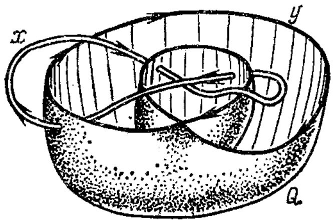


Рис. 127.

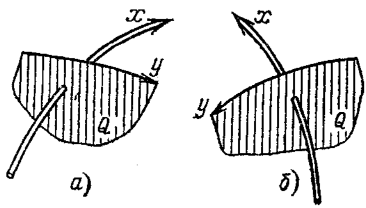


Рис. 128.

Равенство (20) останется справедливым, если взять любую пленку Q (не обязательно построенную так, как это было сделано в задаче 132). В самом деле, пусть имеются две различные ориентируемые пленки Q, Q', натянутые на контур y и ориентированные согласованно с ним. Рассмотрим разность пленок Q и Q', т. е. объединение пленки Q с имеющейся на ней ориентацией и пленки Q' с противоположной ориентацией. Эта разность является двумерным целочисленным циклом (даже если Q и Q' пересекаются). Так как индекс пересечения целочисленного цикла x с этим двумерным циклом равен нулю, то $J\ (x, Q) = J\ (x,\ Q')$.

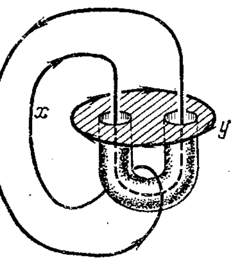


Рис. 129.

Из равенства (20) следует, что коэффициент зацепления (первоначально определенный с помощью нормальной проекции) не зависит от выбора плоскости проекции. Из (20) вытекают также и другие упоминавшиеся выше свойства коэффициента зацепления.

Задачи

140. Пленка, натянутая на контур y (и находящаяся в общем положении с контуром x), пересекается с x в единственной точке. Докажите, что пленка, натянутая на контур x, пересекается с y.

141. Пусть x, y — ориентированные контуры в пространстве. Из формулы (20) вытекает, что если существует ориентированная пленка, натянутая на y и не пересекающаяся с x (рис. 129), то $\mathfrak{w}(x, y) = 0$. Докажите обратную теорему.

142. Докажите, что если $\mathfrak{w}(x, y)$ есть четное число, то существует пленка (возможно, не ориентируемая), натянутая на y и не имеющая общих точек с x.

143. Убедитесь, что три контура на рис. 117 имеют попарно коэффициенты зацепления, равные нулю. Постройте пленку, гомеоморфную ручке, которая натянута на один из этих контуров и не пересекается с двумя другими.