ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ

20. Периоды многозначных функций

Пусть h — некоторый путь в фигуре X, идущий от начальной точки x_0 до конечной точки x_1. Иначе говоря, h: $[0; 1] \to X$ есть непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $h(0) = x_0$, $h(1) = x_1$. Будем этот путь *непрерывно деформировать* в фигуре X, оставляя концевые точки x_0 и x_1 неподвижными. На рис. 130 положения деформируемого пути изображены тонкими линиями. *Мы всегда будем рассматривать только такие деформации путей, при которых концевые точки не смещаются.*

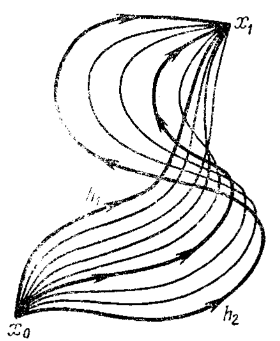

Рис. 130.

Два пути h_1, h_2 в фигуре X, имеющие одни и те же концевые точки, называются *гомотопными* в этой фигуре, если при помощи деформации (происходящей в фигуре X) h_1 может быть превращен в h_2; гомотопность путей обозначается записью $h_1 \sim h_2$.

Пример 38. В круге любые два пути, имеющие общие концы, гомотопны между собой. Наглядно это можно пояснить, вообразив, что путь представляет собой растянутую резиновую нить, извилистым образом расположенную внутри круга. Если мы отпустим резинку, закрепив концевые точки x_0, x_1 и позволив нити свободно перемещаться, то она начнет деформироваться и, сжимаясь, расположится по прямолинейному отрезку, соединяющему x_0 и x_1. Таким образом, любой путь в круге гомотопен отрезку, соединяющему концевые точки x_0 и x_1, и потому любые два пути, соединяющие x_0 и x_1, гомотопны.

Пример 39. Обозначим через X кольцо, ограниченное двумя окружностями с общим центром o. Выберем некоторую точку $x_0 \in X$ и для любой точки $x \in X$ обозначим через $\varphi(x)$ величину угла x_0ox (рис. 131). Функция $\varphi(x)$ *многозначна* (она определена с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число). Предположим, что в точке $x = x_0$ мы выбрали какое-либо одно значение φ_0 этой функции. При перемещении точки x в кольце X угол $\varphi(x)$ будет непрерывно меняться. Поэтому каждому пути h, ведущему в кольце X от точки x_0 к точке x_1, соответствует вполне определенное значение φ_1 многозначной функции $\varphi(x)$, к которому мы приходим, взяв в точке x_0 значение φ_0 этой функции и непрерывно перемещаясь вдоль пути h от x_0 до x_1. При этом гомотопным путям, ведущим в кольце X из точки x_0 в точку x_1, соответствует одно и то же значение функции. В самом деле, значение функции, к которому мы приходим, проходя путь h, будет при непрерывной деформации пути h само непрерывно меняться. Следовательно, это значение должно оставаться постоянным: непрерывно меняясь, оно не может «перескочить» от одного из возможных значений функции $\varphi(x)$ в точке x_1 к другому (отличающемуся от него на $2k\pi$).

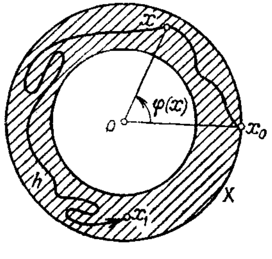

Рис. 131.

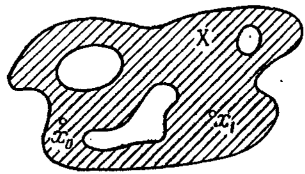

Рис. 132.

Пример 40. Если в примере 37 (с. 93) фиксировать точку нулевого потенциала x_0, то во внешней области проводника P определится многозначная функция $W(x)$ (магнитный потенциал). Переместившись из точки x_0 в точку x_1 по некоторому пути h, мы придем ко вполне определенному значению магнитного потенциала в точке x_1. Гомотопные между собой пути, ведущие из x_0 в x_1, дадут в точке x_1 одно и то же значение магнитного потенциала, а негомотопные могут привести к различным значениям функции $W(x)$ в точке x_1.

Задачи

144. На множестве X (рис. 132) постройте многозначную функцию, принимающую в точке x_0 бесконечное множество значений, среди которых имеются значения $0, 1, \sqrt{5}$.

145. На множестве X (рис. 132) постройте такую многозначную функцию, что два негомотопных пути, ведущих из x_0 к x_1, приводят к одному и тому же значению в точке x_1.

Пример 41. На фигуре X (рис. 133) рассмотрим функцию $f(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_2(x) - \sqrt{3}\varphi_3(x)$, где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — величины углов a_1o_1x, a_2o_2x, a_3o_3x. Функция $f(x)$ многозначна. Если мы, начав движение из точки x_0, пройдем путь h_1 (рис. 133), то (при возвращении

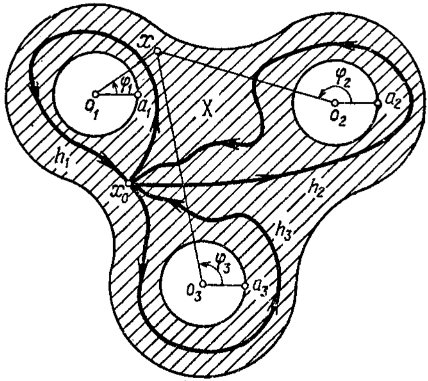

Рис. 133.

в точку x_0) к значению функции $\varphi_1(x_0)$ прибавится 2π, а значения функций $\varphi_2(x_0)$ и $\varphi_3(x_0)$ не изменятся; следовательно, к значению функции $f(x)$ в точке x_0 прибавится 2π. При обходе же пути h_2 к значению функции в точке x_0 прибавится $2\pi\sqrt{2}$, а при обходе пути h_3 прибавится $-2\pi\sqrt{3}$. Числа 2π, $2\pi\sqrt{2}$, $-2\pi\sqrt{3}$ можно назвать *периодами* функции $f(x)$ на множестве X соответствующими замкнутым путям h_1, h_2, h_3.

Рассмотрим теперь путь, получающийся, если сначала пройти h_1, а затем h_2; этот путь обозначается через h_1h_2 и называется *произведением* путей h_1 и h_2. Ясно, что при прохождении пути h_1h_2 к значению функции $f(x)$ прибавится $2\pi + 2\pi\sqrt{2}$. Аналогично, при прохождении пути h_3h_1 к значению функции $f(x)$ прибавится $-2\pi\sqrt{3} + 2\pi$. Вообще, при перемножении двух путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0) соответствующие этим путям периоды функции $f(x)$ складываются.

Так как значение функции $f(x)$, получаемое в результате прохождения некоторого пути, не изменяется при гомотопии этого пути, то мы можем не различать гомотопные пути. Иначе говоря, можно рассматривать не сами пути (начинающиеся и кончающиеся в точке x_0), а *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Класс всех путей, гомотопных пути h, будем обозначать через $[h]$, а множество всех таких классов — через $\pi(X)$. Эти классы можно перемножать: берем путь h, принадлежащий первому классу, путь k, принадлежащий второму классу, и перемножаем их; тогда класс, который содержит путь hk, и называется *произведением* двух взятых классов: $[h]\cdot[k] = [hk]$.

Смысл введения классов путей понятен: каждому классу соответствует некоторый период многозначной функции $f(x)$, а при перемножении двух классов соответствующие периоды складываются.