

шениях очень сходен с расстоянием между точками в евклидовых пространствах обращается в нуль для некоторых пар точек, а направление от одной такой точки к другой является «особенным» — светоподобным.

Световые конусы включают в себя все те направления, по которым могут распространяться световые импульсы. В частности, световой конус прошедшего содержит все те направления в пространстве-времени, по которым информация, переносимая светом, поступает к наблюдателю. Этот наблюдатель должен находиться в той точке пространства и в тот момент времени, которые совпадают с мировой точкой, избранной вершиной светового конуса. Следовательно, любое направление на световом конусе прошедшего может быть сопоставлено с точкой на *небесной сфере*, представляющей собой ту картину, которая открывается нам, когда мы рассматриваем небо и звезды (в точности так же, как глобус отражает наше представление о Земле). Угол между двумя видимыми положениями звезд (измерение таких углов очень важно для астрономов) — это угол между двумя световыми направлениями на световом конусе прошедшего. Если два наблюдателя движутся относительно друг друга со скоростями, сравнимыми со скоростью света, то определенные ими углы между направлениями на одни и те же звезды не будут совпадать. Так и должно быть, потому что относительные положения звезд существенно зависят от движения Земли, определяемого в конкретной инерциальной системе отсчета. Однако скорость Земли за полгода меняется на две десятитысячные доли ( $2 \cdot 10^{-4}$ ) от скорости света из-за годичного движения Земли вокруг Солнца. Из-за этого возникает видимое смещение звезд. Это явление известно под названием *абберации* света. Оно было обнаружено английским астрономом Джеймсом Бредли (1693—1762) в 1725 г. по видимому смещению звезд, достигающему до  $\frac{2}{3}$  угловой минуты (точнее  $41''$ ). В течение года каждая звезда совершала кажущееся движение по эллипсу.

## 6. Масса, энергия, импульс

Теория относительности родилась в недрах электромагнитной теории. Но поскольку электромагнитное поле обнаруживается только при его взаимодействии с заряженными частицами, теория относительности неизбежно должна бы-

ла заняться поведением частиц и приспособить представления ньютоновской механики к своим требованиям.

Согласно законам Ньютона, два взаимодействующих тела оказывают друг на друга действие (силы), равное по величине и противоположное по направлению. В конечном счете, это взаимодействие приводит к изменению скоростей обоих тел, причем эти изменения обратно пропорциональны соответствующим массам тел. Допустим теперь, что одно из взаимодействующих тел движется со скоростью, близкой к скорости света. Теория относительности утверждает, что никакое тело не может двигаться со скоростью, равной или большей, чем скорость света. Это означает, что какие-то факторы должны действовать таким образом, чтобы скорость любого тела в любом случае не превзошла скорости света. Уже одно это обстоятельство показывает, что механика Ньютона требует некоторого видоизменения, обеспечивающего выполнение такого релятивистского требования.

Кроме того, в основе ньютоновской механики лежит утверждение о том, что если два тела взаимодействуют друг с другом, изменения их скоростей происходят таким образом, что их центр инерции (часто называемый также *центром тяжести* или *центроидом*) продолжает двигаться с постоянной скоростью. Следовательно, закон инерции, утверждающий, что тело не меняет свою скорость при отсутствии внешних сил, справедлив не только для элементарных частиц, но и для макроскопических тел, образованных многочисленными частицами, взаимодействующими друг с другом. Если теория относительности оставляет этот закон в силе, движение центра инерции без ускорения в одной лоренцевской системе должно происходить с постоянной скоростью и во всех других лоренцевских системах.

Но преобразование скоростей при преобразовании Лоренца выглядит совсем не так, как в ньютоновской механике, и центр инерции оказывается движущимся с постоянной скоростью во всех лоренцевских системах далеко не автоматически. Фактически, для того чтобы удовлетворить этому условию, Эйнштейн вынужден был предположить, что масса каждой частицы, входящей в систему, зависит от скорости и, следовательно, меняется при переходе от одной лоренцевской системы к другой. Чем быстрее движется частица, тем больше становится ее масса. Было

установлено, что масса движущейся частицы больше массы этой же частицы в покое на величину, равную кинетической энергии частицы, деленной на  $c^2$ . Такая несколько неожиданная зависимость массы от скорости обеспечивала ограничение скоростей частиц досветовыми, независимо от способа их ускорения. Это был первый намек на знаменитую формулу, выражающую эквивалентность массы и энергии  $E = mc^2$ , формулу, которая получила впоследствии куда большее подтверждение, чем это требовало исходное теоретическое утверждение. Элементарные частицы — эти конечные составляющие всякого вещества — могут превращаться в электромагнитное излучение, переходя через некоторые промежуточные состояния или даже минуя их. Небольшой *дефект масс*, на величину которого массы атомных ядер отличаются от суммарной массы образующих эти ядра частиц, определяет некоторую энергию, называемую энергией связи атомных ядер. Эта энергия может быть высвобождена в различных ядерных реакциях; она высвобождается постепенно в ядерных реакторах и почти мгновенно при взрыве атомного оружия.

Масса тела, измеренная в той лоренцевской системе, где тело покоится, называется *массой покоя* тела. Масса покоя является внутренним свойством, присущим самому физическому телу. Масса, которая ответственна за поведение тела при его взаимодействии с другими телами, его *релятивистская масса*, зависит от относительного движения этого тела и системы отсчета. Сумма релятивистских масс нескольких взаимодействующих тел остается неизменной при взаимодействии, однако массы покоя этих тел могут изменяться. Например, атомные ядра могут испытывать радиоактивный распад на несколько более легких частиц; в радиоактивном процессе могут испускаться также и гамма-лучи (очень энергичные электромагнитные импульсы, длины волн которых значительно короче длин волн видимого света или даже обычных рентгеновских лучей). Масса покоя конечных продуктов реакции в сумме меньше, чем масса покоя исходного ядра, однако сумма релятивистских масс, если включить сюда релятивистские массы гамма-лучей, равна релятивистской массе ядра, испытывавшего радиоактивный распад.

Про величину, которая не меняется при изменении состояния физической системы, изолированной от окружаю-

пей среды, говорят, что она *сохраняется*. В ньютоновской физике масса и энергия изолированной системы—сохраняющиеся величины. Любой закон, который утверждает, что некоторая величина, например, такая, как масса или энергия, не меняется с течением времени, называется *законом сохранения*.

В релятивистской физике энергия и (релятивистская) масса эквивалентны, за исключением разве лишь того, что они измеряются в разных единицах. Единица массы в  $c^2$  больше, чем единица энергии. Таким образом, весьма незначительная масса водородной бомбы (менее чем одна сотая от всего «заряда» термоядерного устройства) соответствует колоссальному количеству энергии, выделяемой при взрыве.

Величина, которая сохраняется в изолированной физической системе, может изменяться, когда система вступает во взаимодействие с окружающими ее телами. Скорость ее изменения в данной области пространства определяется величиной потока сохраняющейся величины через поверхность, ограничивающую эту область. Так, например, количество (релятивистской) массы в заданном объеме будет возрастать, если в объем будет входить дополнительная масса; если поток массы направлен из заданного объема, то масса в этом объеме будет уменьшаться. Если нас интересует в первую очередь определение скорости изменения сохраняющейся величины через обуславливающий это изменение поток, а не сохранение этой величины, когда потока нет, то говорят о *законе непрерывности*. Обычно закон непрерывности относят к *плотности* сохраняющейся величины, например к *плотности массы* (плотность массы — это масса единицы объема). Плотность в данной точке пространства возрастает с той же скоростью, с какой соответствующий поток *сходится*, и убывает со скоростью, с какой поток *расходится*. Существенны только сходящиеся и расходящиеся потоки, потому что однородный поток приносит в заданную область такое же количество сохраняющейся величины, какое уносит из другой. Два выражения: *закон сохранения* и *закон непрерывности* — являются двумя различными формулировками одного и того же закона, смысл которого состоит в том, что определенная физическая величина не может возникнуть и не может быть уничтожена; она просто перемещается в пространстве.

До того, как появилась специальная теория относительности, под энергией тела понимали его способность совершать работу над другими физическими объектами, и эта способность могла быть обусловлена как положением тела в пространстве, так и его движением. Тяжелый груз, опускаясь вниз с высокой башни, может приводить в действие какое-то устройство, совершая тем самым работу (например, если с помощью тросов он вращает ворот). Такой вид энергии называют *потенциальной энергией*. Когда груз опустится на землю, он уже не может совершать работу; следовательно, его потенциальная энергия уменьшилась. Та часть энергии тела, которая связана с движением тела, называется *кинетической энергией*. Автомобиль, движущийся по шоссе со скоростью 100 км/ч, может совершить некоторую работу даже в том случае, если мотор выключен и передача отключена. Если движущийся автомобиль сталкивается с неподвижным, то он приводит неподвижный автомобиль в движение, но сам теряет скорость; таким образом, совершая работу, автомобиль теряет часть своей кинетической энергии.

При благоприятных условиях тело может совершить работу, превратив часть своей массы покоя или даже всю ее в некоторую другую форму материи, которая может совершать работу; при этом вовсе не требуется затраты ни потенциальной, ни кинетической энергии со стороны этого тела. По этой причине имеет смысл считать, что энергия тела состоит из потенциальной энергии, кинетической энергии и *энергии покоя*; энергия покоя равна массе покоя тела, умноженной на  $c^2$ . Полная сумма всех видов энергии физического объекта называется его *полной (релятивистской) энергией*. Полная энергия равна релятивистской массе объекта, умноженной на  $c^2$ .

Хотя в любой инерциальной системе отсчета релятивистская масса (а вместе с ней и полная энергия) сохраняется, релятивистская масса и полная энергия имеют разные значения в двух системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Это происходит потому, что скорость одного и того же тела оказывается различной в разных инерциальных системах отсчета. В этом отношении релятивистская механика напоминает ньютоновскую. Действительно, в классической механике полная энергия (сумма кинетической и потенциальной) объекта или системы частиц сохраняется в любой заданной инерциальной системе отсчета.

Но если потенциальная энергия не зависит от выбора системы отсчета, кинетическая энергия принимает различные значения в зависимости от выбора системы отсчета; то же самое, конечно, относится к полной энергии. Таким образом, в классической и в релятивистской механике полная энергия изолированной системы сохраняется; это значит, что величина полной энергии не меняется с течением времени независимо от того, в какой системе отсчета эта энергия рассчитывается. Но хотя полная энергия сохраняется, она все же имеет разные значения, когда мы переходим от одной инерциальной системы к другой.

Можно ли указать закон, по которому энергия тела или системы в одной инерциальной системе отсчета связана с энергией этого же объекта в другой? Как ньютоновская, так и релятивистская механика отвечают на этот вопрос утвердительно. Между значениями энергии в двух инерциальных системах отсчета существует определенная математическая связь; однако в эту связь входит не только относительная скорость рассматриваемых систем отсчета, но и еще одна величина — *импульс*. Импульс частицы — это произведение ее массы на скорость. Сам по себе импульс определяет меру толчка, который производит частица, сталкиваясь с неподвижным объектом. Импульс представляет собой *вектор*, т. е. величину, обладающую направлением, — в данном случае речь идет о направлении скорости частицы; в декартовой системе координат импульс очень удобно разлагается на три составляющие, параллельные трем координатным осям, в точности так же, как скорость.

Импульс системы частиц определяется вполне однозначным образом; он равен *векторной сумме* импульсов отдельных частиц, входящих в систему. Сумма нескольких векторов определяется не как арифметическая сумма длин векторов (каждый вектор имеет не только направление, но и длину), а как вектор, получающийся следующим образом из векторов, входящих в сумму: к концу первого вектора мы прикладываем начало второго; к концу второго — начало третьего и т. д., причем направление каждого вектора остается неизменным. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, и будет искомой векторной суммой. Компоненты векторной суммы получаются как суммы соответствующих компонент слагаемых векторов. Например,  $x$ -компонента векторной суммы представляет собой сумму (арифметическую)  $x$ -компонент всех слагае-

мых векторной суммы. Векторная сумма импульсов нескольких частиц равна произведению их суммарной массы на скорость центра инерций этих частиц.

Обусловленный сохранением массы ньютоновский закон инерции может быть сформулирован еще и так: импульс изолированной системы остается постоянным, т. е. не меняется со временем. Он остается постоянным, несмотря на всевозможные внутренние взаимодействия, так как изменения импульса, которые вызывает друг у друга любая пара частиц, взаимно компенсируются согласно основному принципу: силы, вызывающие эти изменения, равны по величине и противоположны по направлению. И здесь существует закон непрерывности, на этот раз относящийся уже к импульсу: импульс любой области пространства может меняться только тогда, когда через границу этой области проходит поток импульса. В релятивистской механике правильное выражение для импульса, приводящее к сохраняющейся величине, получается умножением скорости объекта на его релятивистскую массу. Связь импульса, определенного в одной лоренцевской системе отсчета, с импульсом, определенным в другой лоренцевской системе, определяется соотношением, в которое входит релятивистская масса, и следовательно, энергия. Поэтому, чтобы найти значение полной энергии (или релятивистской массы) или импульса в произвольной лоренцевской системе отсчета, нужно в какой-то одной системе отсчета знать обе эти величины. Знание этих величин не только необходимо, но и достаточно. Численные значения четырех величин — энергии и трех компонент импульса — в одной лоренцевской системе полностью определяют численные значения соответствующих величин в любой другой лоренцевской системе отсчета.

Дополнительный математический анализ показывает, что эти четыре величины (три компоненты импульса и энергия) в четырехмерной Вселенной Минковского ведут себя, как четыре компоненты вектора \*), представляющего собой геометрический объект, который в четырехмерном континууме обладает как длиной, так и направлением и мо-

---

\*) Следует отметить, что в системе взаимодействующих частиц импульс и энергия системы при переходе от одной лоренцевой системы к другой уже не преобразуются как компоненты 4-вектора. (Прим. перев.)

жет быть разложен на четыре компоненты, параллельные четырем пространственно-временным осям любой выбранной лоренцевской системы отсчета.

В обычном трехмерном пространстве длина вектора  $V$  определяется через три его компоненты  $a$ ,  $b$  и  $c$  по формуле

$$V^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

непосредственно получающейся из теоремы Пифагора. Если взять две различные декартовы системы координат, то компоненты вектора в этих системах будут разными, однако сумма квадратов этих компонент останется неизменной. На языке математики величина  $V$  представляет собой *инвариант* относительно ортогональных преобразований координат (напомним, что ортогональными преобразованиями координат называют такие преобразования, которые соответствуют переходу от одной декартовой системы к другой). Аналогично этому, если обозначить через  $E$  релятивистскую энергию тела, а компоненты его импульса по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — через  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , то *энергия покоя*  $E_0$  определяется выражением

$$c^{-2}E_0^2 = c^{-2}E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2.$$

Следовательно, величины  $E/c$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  можно рассматривать как компоненты вектора в пространстве-времени Минковского (рис. 25; на этом рисунке, так же как и на рис. 26, изображены только два пространственных направления). Компоненты этого вектора, обычно называемого *вектором энергии-импульса*, имеют различные численные значения в различных лоренцевых системах отсчета; однако абсолютная величина (длина) этого вектора одинакова во всех лоренцевых системах отсчета; другими словами, длина этого вектора есть инвариант преобразования Лоренца или лоренц-инвариантная величина.

Вектор энергии-импульса как целое сохраняется; это значит, что вектор энергии-импульса изолированной механической системы не меняет ни своей длины, ни своего направления в пространстве-времени Минковского в процессе изменения состояния системы со временем, независимо от того, какие взаимодействия внутри системы имеют место. Сохранение вектора импульса-энергии означает сохранение всех его компонент порознь в любой лоренцевой системе отсчета, хотя значения этих компонент ока-



зываются различными при переходе от одной лоренцевой системы к другой.

Когда мы доберемся до изложения общей теории относительности, нам придется рассматривать энергию, импульс и законы их сохранения через относительные плотности; это позволит нам подойти к нужным выражениям

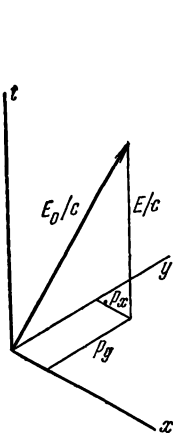


Рис. 25. Вектор энергии-импульса в пространстве-времени Минковского.

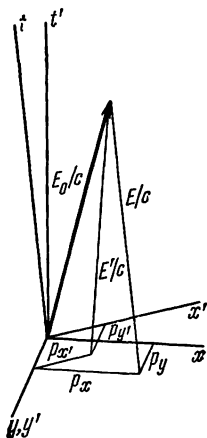


Рис. 26. Компоненты вектора энергии-импульса в двух различных лоренцевых системах отсчета.

для закона непрерывности. Чтобы пояснить, как это делается, полезно рассмотреть более простой пример, а именно электрический заряд; в этом случае мы избежим некоторых усложнений, связанных с рассмотрением вектора энергии-импульса.

Электрический заряд физической системы представляет собой *скаляр* (одну величину, значение которой во всех координатных системах одно и то же). Электрический заряд изолированной системы сохраняется. Он не может меняться с течением времени, если только заряды не приходят в систему или не уходят из системы. Полный заряд системы равен (алгебраической) сумме зарядов, входящих в систему тел.

Вместо того чтобы говорить о полном заряде системы, можно ввести понятие *плотности заряда*, определив ее как заряд единицы объема. Поскольку объем любой обла-

сти пространства меняется при переходе от одной лоренцевой системы к другой (из-за относительности расстояний и длин), плотность заряда оказывается различной в различных системах отсчета. Оказывается, что плотность заряда — это одна из компонент четырехмерного вектора, три остальные компоненты которого представляют собой поток заряда, *плотность электрического тока*. Плотность электрического тока определяется как величина заряда, проходящего через площадку в  $1 \text{ см}^2$  (или вообще через единицу площади) за единицу времени, причем площадка выбирается перпендикулярно направлению потока. С точки зрения обычного трехмерного пространства плотность тока является вектором, а три его компоненты соответствуют потокам в направлении оси  $x$  (через площадку в плоскости  $y, z$ ), оси  $y$  и оси  $z$ .

Закон сохранения заряда можно сформулировать в виде соотношения между плотностью заряда и плотностью электрического тока: скорость, с которой увеличивается плотность электрического заряда, равна сходимости плотности электрического тока, т. е. превышению скорости потока внутри области над скоростью потока из этой области. Этот закон *непрерывности электрического заряда* эквивалентен закону сохранения заряда: если бы заряд не сохранялся, скорость, с которой увеличивалась бы плотность заряда, могла быть либо больше, либо меньше, чем соответствующий поток; это означало бы, что заряд мог возникнуть из ничего или «просто так» исчезнуть.

Обращаясь снова к четырехмерному языку, мы скажем, что скорость изменения плотности электрического заряда с течением времени может быть истолкована как одна из компонент потока в четырехмерной области; эта компонента, складываясь с тремя другими компонентами, обеспечивает в сумме сохранение заряда. С четырехмерной точки зрения закон непрерывности электрического заряда утверждает, что разность потока заряда внутри четырехмерной области и потока из области равна нулю. Если изобразить картину четырехмерного потока графически, с помощью системы *линий тока* (т. е. линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением потока в этой точке, считая, что густота линий в некоторой области характеризует величину потока), то закон непрерывности требует, чтобы все линии тока были кривыми без начала и конца. Это может быть либо в том

случае, когда линии тока замкнуты (т. е. имеют форму петли), либо тогда, когда они выходят из бесконечности и уходят снова в бесконечность.

Четырехмерная формулировка закона сохранения энергии (массы) и импульса требует введения новых понятий — плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса. Но если полная энергия и полный импульс системы образуют мировой вектор, имеющий четыре компоненты, плотности этих величин входят в некоторое образование с шестнадцатью компонентами. Это образование можно было бы назвать вектором второго порядка, однако чаще его называют *тензором*. Число компонент тензора несколько меньше, чем максимально возможное число компонент — шестнадцать, так как оказывается, что плотность потока энергии и плотность импульса — это одно и то же; плотность потока импульса, которая известна также под названием *натяжений*, обладает еще тем свойством, что поток  $x$ -компоненты импульса в направлении  $y$  равен потоку  $y$ -компоненты импульса в направлении  $x$  (и также для остальных компонент). В результате число компонент *тензора энергии-импульса — натяжений* оказывается равным десяти.

## 7. Плоское пространство — искривленное пространство

Для описания геометрических соотношений в обычном пространстве декартова система координат имеет явные преимущества, потому что многие геометрические связи, выраженные в декартовых координатах, имеют наиболее простой вид; однако отдавать предпочтение декартовым системам приходится просто из удобства, но такие системы не всегда являются самыми удобными. В ньютоновской механике, например, описывать орбиты планет при движении вокруг солнца удобнее в координатной системе, в которой выделяется положение солнца и легко учитывается, что гравитационное поле Солнца убывает одинаково по всем направлениям. Это — сферическая система координат. Сферическими координатами точки  $P$  являются: расстояние  $r$  от начала системы координат, за которое принимается Солнце, и два угла  $\theta$  и  $\phi$ , определяющие направление, в котором нужно двигаться от Солнца, чтобы