случае, когда линии тока замкнуты (т. е. имеют форму петли), либо тогда, когда они выходят из бесконечности и уходят снова в бесконечность.

Четырехмерная формулировка закона сохранения энергии (массы) и импульса требует введения новых понятий — плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса. Но если полная энергия и полный импульс системы образуют мировой вектор, имеющий четыре компоненты, плотности этих величин входят в некоторое образование с шестнадцатью компонентами. Это образование можно было бы назвать вектором второго порядка, однако чаще его называют *тензором.* Число компонент тензора несколько меньше, чем максимально возможное число компонент — шестнадцать, так как оказывается, что плотность потока энергии и плотность импульса — это одно и то же; плотность потока импульса, которая известна также под названием *натяжений*, обладает еще тем свойством, что поток x-компоненты импульса в направлении y равен потоку y-компоненты импульса в направлении x (и также для остальных компонент). В результате число компонент *тензора энергии-импульса — натяжений* оказывается равным десяти.

7. *Плоское пространство — искривленное пространство*

Для описания геометрических соотношений в обычном пространстве декартова система координат имеет явные преимущества, потому что многие геометрические связи, выраженные в декартовых координатах, имеют наиболее простой вид; однако отдавать предпочтение декартовым системам приходится просто из удобства, но такие системы не всегда являются самыми удобными. В ньютоновской механике, например, описывать орбиты планет при движении вокруг солнца удобнее в координатной системе, в которой выделяется положение солнца и легко учитывается, что гравитационное поле Солнца убывает одинаково по всем направлениям. Это — сферическая система координат. Сферическими координатами точки P являются: расстояние r от начала системы координат, за которое принимается Солнце, и два угла θ и φ, определяющие направление, в котором нужно двигаться от Солнца, чтобы достичь точки P (рис. 27). Среди трех сферических координат r, θ, φ всего лишь одна — расстояние от Солнца r — определяет силу гравитационного притяжения Солнца, тогда как в декартовых координатах (x, y, z, изображенных на рис. 27) эта сила определяется всеми тремя координатами. Сферические координаты могут служить примером системы криволинейных координат, у которых некоторые (или даже все) координатные оси — кривые линии, а не прямые, как у декартовой системы. Во Вселенной Минковского также встречаются отдельные случаи, когда следует отдать предпочтение не лоренцевым, а каким-либо другим системам.

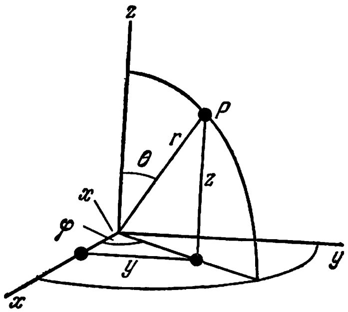

Рис. 27. Сферические координаты.

Лоренцевы системы отсчета аналогичны декартовым системам координат в обычной геометрии. Все их оси — три пространственные и ось времени — образованы прямыми линиями, причем эти прямые идут под прямым углом друг к другу. Но в пространстве — времени Минковского допустимы и криволинейные координаты. Ими иногда пользуются, например, если мы захотим описать Вселенную с точки зрения наблюдателя, движущегося с постоянным ускорением. Этот случай реализуется для космонавта в ракете, когда работают двигатели. На рис. 28 изображена траектория ракеты, движущейся равномерно ускоренно, в переменных x, t. Согласно механике Ньютона скорость ракеты растет неограниченно, как это и показано на рис. 28, *а* (кривая на рисунке — парабола). Согласно релятивистской механике скорость ракеты также будет возрастать, но она никогда не сможет превзойти скорость света (соответствующую прямой с.с); траектория для этого случая изображена на рис. 28, *б*. Это будет уже гипербола, которая в четырехмерном случае асимптотически приближается к световому конусу.

Чтобы не усложнять чертежа, две другие пространственные оси, не имеющие отношения к движению ракеты, на рисунке не изображены. На рис. 29 показана пространственно-временная координатная система x, x', t, самая подходящая для наблюдателя в ракете.

Специфической особенностью этой системы является то, что расстояние наблюдателя от точки O остается неизменным, поскольку это расстояние следует определять

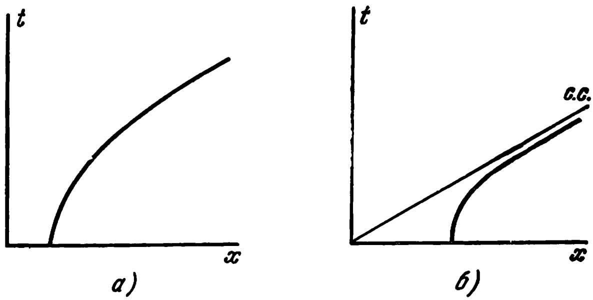

Рис. 28. Траектории наблюдателя, движущегося равномерно ускоренно.

вдоль линии, перпендикулярной направлению полета ракеты в каждый данный момент времени; такая линия определяет «одно и то же время» по измерениям наблюдения. Таким образом, «длина» линий AO, BO и CO на рис. 29 одна и та же.

Декартова и лоренцева координатные системы служат примером *прямолинейных координатных систем;* сферическая система координат и ускоренно движущаяся система отсчета в четырехмерной Вселенной Минковского дают нам пример *криволинейной системы координат.* В зависимости от того, в какой системе отсчета выполняются геометрические построения, будут и математические выражения для этих построений; описание физических явлений будет выглядеть по-разному в координатных системах различного типа. Но выбор координатной системы — это просто выбор способа описания; такой выбор не может влиять на внутренние свойства континуума, которые нам нужно описать. Пространства и континуумы независимо от способа описания обладают своими внутренними геометрическими свойствами. Одно из этих свойств, к которому мы переходим, называется *кривизной* пространства или континуума. (Пространство называется искривленным, если только оно не плоское; это свойство не имеет ничего общего с выбором криволинейной системы координат.)

Пространство (или многообразие) называется *искривленным*, если в нем невозможно ввести координатную систему, которая может считаться прямолинейной. Пространство называется *плоским*, если в нем может существовать прямолинейная система координат независимо от того, используется она или нет. Для этого определения существенно, что *прямая линия*, или, лучше, *геодезическая линия*, определяется как кривая, проходящая через две данные точки, расстояние вдоль которой между этими точками меньше, чем расстояние по любой другой кривой, проходящей через эти же точки. Координатная система будет прямолинейной, если ее оси (и прямые, параллельные этим осям) во всем пространстве представляют собой прямые линии; в этом случае две определенные оси (скажем, оси x и y и по-прежнему все прямые, параллельны этим осям) в любой точке пространства пересекаются под одним и тем же углом. В искривленном пространстве такую систему координат построить нельзя. Все континуумы, о которых шла речь до сих пор, были плоскими.

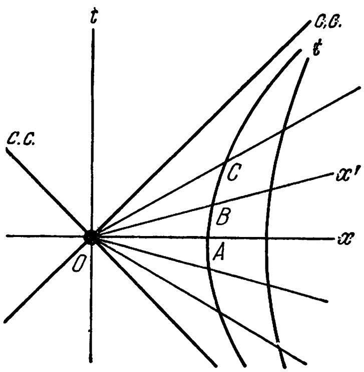

Рис. 29. Система координат, удобная для наблюдателя, к которому относится рис. 28, б.

Примером искривленного многообразия — в данном случае двумерного многообразия — может служить поверхность сферы. На сферической поверхности геодезическими линиями являются так называемые большие круги, у которых на самом деле есть много свойств, напоминающих свойства прямых линий. Меридианы и параллели на Земле как раз и являются большими кругами (рис. 30). Так как большой круг, проходящий через две данные точки, является кратчайшим путем между этими двумя точками (кратчайшим для перемещения по сферической поверхности), дальние маршруты самолетов прокладываются так, чтобы они были большими кругами. Большие круги и сегменты больших кругов можно использовать для построения геометрических фигур. Можно говорить о сферических треугольниках или четырехугольниках (рис. 31). Однако не существует сферических параллелограммов. Если попытаться построить параллелограмм (рис. 32), отметив две граничные точки сегмента большого круга a,

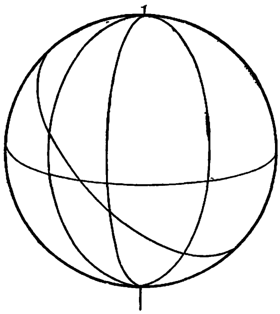

Рис. 30. Большие круги на сферической поверхности

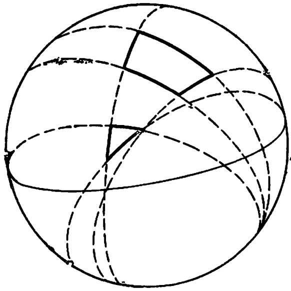

Рис. 31. Сферический треугольник и сферический четырехугольник.

затем провести еще две стороны b и c, обе равной длины и перпендикулярные a, то окажется, что четвертая сторона четырехугольника d короче, чем исходный сегмент a. Можно начать с отрезка экватора и отложить от его концов равные отрезки по меридианам; концы этих отрезков будут лежать на круге, параллельном экватору. То, что расстояние между этими двумя точками меньше, чем исходный отрезок экватора, — совершенно очевидно. Если продолжить сегменты меридианов до полюса, конечные точки сегментов на полюсе совпадут и результатом построения будет уже не четырехугольник, а треугольник (рис. 33). Следовательно, сумма трех углов этого треугольника будет превышать 180° на величину угла в вершине. Сравните это с тем, что имеет место в плоском двумерном пространстве (на плоскости), где сумма углов треугольника всегда равна точно 180°.

Представление о *параллельном переносе* позволяет уяснить специфические свойства искривленного пространства. Если взять две точки в пространстве и вектор в одной из них, то можно построить вектор во второй точке, который параллелен вектору, заданному в первой точке. Чтобы выполнить это построение, проведем через рассматриваемые точки геодезическую линию и совершим перенос исходного вектора вдоль геодезической линии, принимая во внимание, что угол между прямой линией и вектором при параллельном переносе остается постоянным, что вектор не поворачивается вдоль прямолинейного пути, а только скользит вдоль него и, наконец, что при параллельном переносе

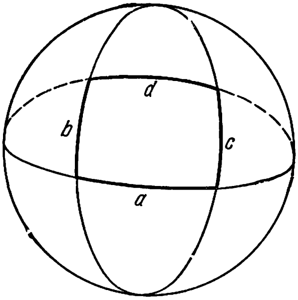

Рис. 32. Попытка построения прямоугольника на сферической поверхности.

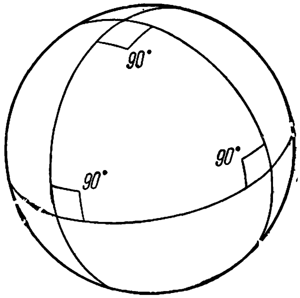

Рис. 33. Сферический треугольник, сумма углов которого равна 270°.

длина вектора не меняется. В точности такая же процедура может быть применена к параллельному переносу вектора вдоль замкнутого пути, образованного несколькими прямолинейными сегментами (рис. 34). Существует много путей, по которым можно совершить параллельный перенос вектора из одной точки в другую. В плоском пространстве конечный результат переноса не зависит от пути, по которому совершается перенос, а определяется исключительно исходным вектором; в каждой точке пространства существует единственное направление, параллельное заданному в какой-то точке. В искривленном же пространстве результат параллельного переноса вектора зависит не только от исходного вектора, но и от пути, по которому совершается перенос. Если вектор v_0 (рис. 35) сначала параллельно переносится из точки A в точку B, а затем в точку D, то в результате мы получим вектор v_1, если параллельный перенос вектора v_0 совершается от точки A к точке D

через точку C, то результатом переноса будет вектор v_2. Параллельный перенос вектора вдоль пути, состоящего из отрезков прямых (ломаная линия), в конце концов возвращающихся в исходную точку (замкнутая ломаная), приводит к новому вектору в начальной точке; этот новый вектор отнюдь не совпадает с исходным, хотя при

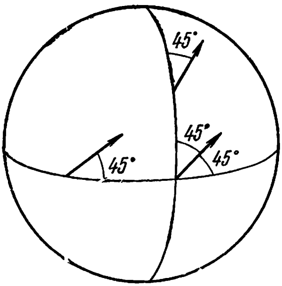

Рис. 34. Параллельный перенос вектора по поверхности сферы.

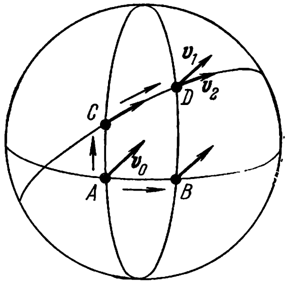

Рис. 35. Параллельный перенос вектора по двум возможным путям переноса.

переносе вектора по всем сегментам петли мы нигде не нарушили правил параллельного переноса.

Вернемся к уже использованному примеру сферической поверхности; сферический треугольник на этой поверхности может быть образован двумя меридианами и сегментом экватора. Такой треугольник представляет собой замкнутую кривую, каждый сегмент которой образован геодезической линией. Если сегмент экватора выбрать равным 90° (географической широты), как это сделано на рис. 33, нетрудно проследить за параллельным переносом вектора по такому замкнутому контуру (рис. 36). Допустим, что мы начинаем обход с самой западной точки A, а вектор v_0 направлен точно на восток; параллельный перенос вектора v_0 вдоль экватора до точки B приведет нас к вектору v_1, который также направлен на восток. При параллельном переносе по восточному меридиану от экватора до полюса C вектор будет все время направлен на восток до тех пор, пока он не окажется на полюсе. На полюсе в точке C вектор v_2 будет направлен под прямым углом к восточному меридиану и, следовательно, будет касательным к западному. Когда вектор будет скользить вдоль западного меридиана к югу, т. е. к точке экватора A, он будет все время оставаться касательным к меридиану и все время показывать на север. Таким образом, вернувшись в точку A, он будет иметь направление $\boldsymbol{v}_3$, составляющее 90° с исходным направлением.

Вселенная Минковского представляет собой плоское пространство. Направлению, заданному в определенной мировой точке, соответствует единственное параллельное направление в любой другой мировой точке. Это направление будет времениподобным, пространственноподобным или светоподобным, в зависимости от того, каким было выбрано исходное направление. Рассмотрим теперь времениподобное направление для заданной лоренцевой системы отсчета; пусть это направление будет параллельным временно́й оси. Частица, мировая линия которой совпадает с этим направлением, покоится в этой лоренцевой системе отсчета. Таким образом, это выделенное направление может быть однозначно отождествлено с теми направлениями во всех других мировых точках, если только представление о покое в заданной лоренцевой системе отсчета имеет определенный смысл во всем пространстве-времени. Только в силу того, что Вселенная Минковского плоская, состояние движения двух физических объектов относительно друг друга может быть четко определено независимо от того, какое расстояние их отделяет.

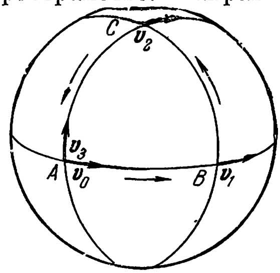

Рис. 36. Параллельный перенос вектора по замкнутому пути.

Возможно даже, что Эйнштейн и Минковский сделали неосмотрительный выбор, когда они считали пространство-время специальной теории относительно плоским. Обычно физики начинают задумываться об основных предположениях, на которых строятся их теории лишь тогда, когда эти теории приводят к трудностям. Так было и на этот раз. Не прошло и десяти лет со дня выхода в свет работы Минковского, как Эйнштейн был вынужден изменить геометрию Вселенной Минковского и принять, что при наличии гравитационного поля пространство-время уже не плоское, а искривленное.