

1 Закон равных площадей Кеплера

Кеплер обнаружил, что при движении планет вокруг Солнца радиус-вектор планеты (прямая, соединяющая Солнце и планету) «ометает» за равные промежутки времени равные площади, как это изображено на рис. 2. В этом Дополнении мы покажем, что закон равных площадей можно получить, считая, что ускорение планеты в любой момент времени направлено к Солнцу.

Заменим действительную траекторию планеты ломаной линией, как это сделано на рис. 68. (Такая замена отнюдь

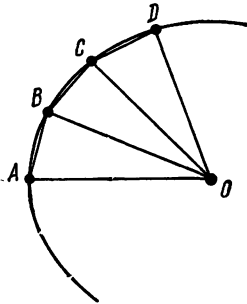


Рис. 68. Закон равных площадей.

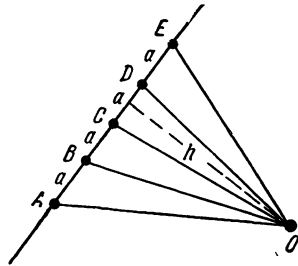


Рис. 69. Движение без ускорения.

не необходима, но она позволяет избежать применения дифференциального исчисления.) Каждый сегмент на рис. 68 выбран так, что радиус-вектор планеты «ометает» каждый треугольник (AOB , BOC , ...) за один и тот же промежуток времени (скажем, месяц). Рис. 69 иллюстрирует случай неускоренного движения. На этом рисунке отрезки

AB, BC, \dots имеют одинаковую длину. В этом случае совсем нетрудно убедиться в том, что все треугольники: AOB, BOC, \dots имеют равные площади. Доказательство опирается на формулу площади треугольника

$$A = \frac{1}{2} ah.$$

Буквой A обозначена площадь треугольника, a — любая из его сторон, h — высота, опущенная на эту сторону (перпендикуляр, опущенный из вершины, противолежащей стороне a). Если на рис. 69 выбрать стороны AB, BC, \dots за основания, у всех треугольников высота будет одна и та же. А так как стороны AB, BC, \dots равны друг другу, то и площади, которые нас интересуют, оказываются равными.

Вернемся к рис. 68. Почему оказывается, что треугольник BOC имеет одинаковую площадь с треугольником AOB ? Так как сторона BO в одном треугольнике равна стороне BO в другом треугольнике, то отсюда следует, что высота, опущенная из C на BO , должна быть равна высоте, опущенной из A на OB (рис. 70). Поскольку отрезки AB, BC, \dots в последовательно построенных треугольниках представляют скорости (смещения в единицу времени), следует

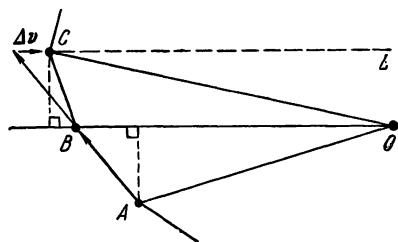


Рис. 70. Несколько увеличенная часть рис. 68.

заключить, что приращение скорости Δv должно быть параллельно радиусу-вектору BO . Для достаточно узких треугольников (если направление движения указывается не раз в месяц, а раз в день, в час или секунду) линия L будет проходить совсем рядом с Солнцем, находящимся в точке O . В предельном случае, когда точки A, B, C, \dots находятся уже на бесконечно близком расстоянии друг от друга и ломаная уже не отлична от плавной кривой на рис. 2 и 68, непрерывное изменение направления движения при движении по орбите будет точно указывать в точку O .

Тем самым доказательство закончено. Сила изменяющая движение планеты, в любой момент времени должна быть направлена к Солнцу, если выполняется закон площадей Кеплера.