Поскольку сила, действующая со стороны Солнца на планету, равна произведению массы планеты на ускорение, для силы $f$ можно написать выражения

$$f = 4\pi^2 \frac{mr}{T^2} .$$

Если период обращения $T$ пропорционален $r^{3/2}$, как это было установлено Кеплером на основе наблюдений, произведенных Тихо Браге:

$$T = br^{3/2},$$

то, подставляя этот эмпирический закон в предыдущее выражение для силы, мы придем к искомой зависимости сил, действующих со стороны Солнца на планету, в виде

$$f = \frac{4\pi^2}{b} \frac{m}{r^2} .$$

### *3. Преобразование Лоренца*

Для двух наблюдений, которые связаны с инерциальными системами отсчета, находящимися в относительном движении, существуют соотношения, позволяющие пересчитать пространственные и временные координаты события от одной системы отсчета к другой. Если эти соотношения удовлетворяют основным требованиям специальной теории относительности, они называются преобразованием Лоренца. В эти основные требования входит требование универсальности скорости света в пустоте для всех инерциальных систем отсчета. Кроме того, нужно удовлетворить еще и такому условию: если два события наступили таким образом, что соединяющая их прамая перпендикулярна направлению относительного движения двух систем, и если события в одной системе отсчета были одновременны, они должны оказаться одновременными и в любой другой системе; расстояние между этими событиями также должно быть одинаковым для обоих наблюдателей. Происходит так потому, что проблема одновременности, поднятая Эйнштейном, может быть обойдена для пары событий, находящихся в указанном взаимоотношении. Если наблюдатель находится на прямой, делящей линию, соединяющую два события, пополам и перпендикулярную к ней, расстояния между ним и точками, в которых произошли два события, останутся равными друг другу в любой момент времени до тех пор, пока наблюдатель остается на этой линии (рис. 72).

Допустим теперь, что второй наблюдатель движется относительно первого наблюдателя с постоянной скоростью $v$ в положительном направлении оси $x$. Обозначим время этого наблюдателя (в его системе отсчета) через $t'$, его пространственную координату в направлении относительно движения через $x'$, а расстояние по перпендикуляру от оси $x'$ через $r'$. Произведем в момент времени $t' = 0$ в точке $r' = 0$ вспышку света. Согласно основным постулатам специальной теории относительности свет будет распространяться по всем направлениям с одинаковой скоростью $c$. Другими словами, этот световой сигнал будет распространяться таким образом, что в любой момент времени $t'$, последующий за моментом вспышки, геометрическим местом точек, до которых дойдет сигнал (световая волна), будет сфера радиуса $ct'$. Поэтому связь между временем и пространственными координатами запишется в форме уравнения сферы

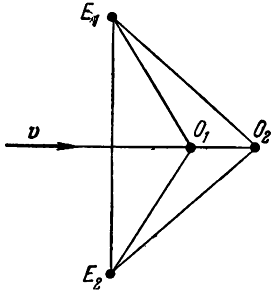


*Рис. 72. Два события, наступившие на линии, перпендикулярной направлению движения.*

$$x'^2 + r'^2 = c^2t'^2,$$

если слегка изменить расположение слагаемых, то

$$c^2t'^2 - x'^2 = r'^2.$$

Тот же самый сигнал может видеть второй наблюдатель, у которого свои координатные отметки и свой счет времени. Для простоты будем считать, что и в его системе отсчета вспышка произошла в момент времени $t = 0$ и в точке $x = 0$, $r = 0$. По предположению оба наблюдателя должны обнаружить, что свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью $c$. Поэтому второй наблюдатель установит, что для светового сигнала справедливо равенство

$$c^2t^2 - x^2 = r^2.$$

Так как величина $r$ представляет собой расстояние, отсчитываемое перпендикулярно направлению движения, оба пространственных расстояния $r$ и $r'$ в любой момент времени равны друг другу, так что соответствующие пространственные и временные координаты (сферического фронта волны) связаны между собой соотношением

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - r'^2. \tag{1}$$

Это соотношение должно удовлетворяться для всех комбинаций $x$, $t$, $x'$ $t'$, так как они относятся к одному и тому же набору мировых точек. Действительно, для любого набора $x$, $t$, $x'$, $t'$ всегда можно подобрать значение $r$ или $r'$, так чтобы удовлетворялось условие, которым описывается распространение светового сигнала (при единственном условии, что $(c^2t^2) - x^2)$ — не отрицательная величина).

Чтобы получить окончательные формулы для связи переменных двух наблюдателей, следует ввести еще одно требование: выбор начала отсчета для координат и для времени должен быть несущественным. Связь между координатами должна быть такой, что для любой пары событий разность координат, найденная одним наблюдателем, должна однозначно определять разность координат для тех же событий, которую найдет другой наблюдатель. Так должно быть всегда независимо от расположения этих двух событий относительно начала отсчета координат и времени. Следовательно, величины $t$, $x$ и $t'$, $x'$ нужно скорее интерпретировать не как сами координаты, а как разности координат двух мировых точек: той, в которой была произведена вспышка, и той, в которой отмечается приход светового сигнала. Такие непосредственные связи между разностями координат могут быть лишь в том случае, если формулы преобразования линейны, т. е. если преобразования координат и времени можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= k(x - vt), \\ t' &= mt - nx, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где три постоянные $k$, $m$ и $n$ нужно еще определить. Первое из равенств (2) написано именно так, чтобы было соблюдено следующее условие: начало отсчета штрихованной системы координат ($x' = 0$) перемещается вправо по оси $x$ со скоростью $v$, так что его положение в момент $t$ первый наблюдатель найдет по формуле $x = vt$.

Теперь задача свелась к определению постоянных $k, m$ и $n$. Если считать время универсальным (абсолютным), как это делается в классической ньютоновской физике, то эти постоянные принимают значения

$$k = 1, \quad m = 1, \qquad n = 0.$$

Эти значения могут служить ориентирами для получения преобразования Лоренца, потому что преобразование Лоренца должно сводиться к преобразованию

$$x' = x - vt, \qquad t' = t$$

по крайней мере в том случае, когда относительная скорость $v$ мала по сравнению со скоростью света $c$. Если подставить (2) в равенство (1), мы получим

$$(c^2m^2 - v^2k^2)t^2 + 2(vk^2 - c^2mn)tx - (k^2 - c^2n^2)x^2 = c^2t^2 - x^2.$$

Это соотношение должно удовлетвориться для любых $x$ и $t$, поэтому коэффициенты при $x$ и $t$ в левых и правых частях должны быть равны; следовательно,

$$m^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 k^2 = 1, \tag{3}$$

$$vk^2 - c^2mn = 0, \tag{4}$$

$$k^2 - c^2n^2 = 1. \tag{5}$$

Из этих трех уравнений постоянные $k$, $m$ и $n$ могут быть определены прямыми алгебраическими выкладками. Например, из (5) можно выразить $k$ через $n$: $k^2 = 1 + c^2n^2$. Это выражение для $k$ можно подставить в (3) и (4):

$$m^2 - v^2n^2 = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{6}$$

$$c^2n(m - vn) = v. \tag{7}$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$n = \left(\frac{v}{c^2}\right)(m - vn)^{-1}, \tag{8}$$

а уравнение (6) переписать так:

$$(m - vn)(m + vn) = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{9}$$

Далее, очевидно,

$$m + vn = m - vn + 2vn = (m - vn) + 2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 (m - vn)^{-1}, \tag{10}$$

в силу (8). Если (10) подставить в левую часть (9), получится уравнение

$$(m - vn)^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{11}$$

из которого с точностью до знака можно определить выражение $m - vn$. Но в связи с тем, что для малых значений $v/c$ мы должны получить единицу, отрицательное значение корня следует отбросить, и единственно возможным значением для величины $m - vn$ будет

$$m - vn = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{12}$$

Из соотношения (8) получим

$$n = \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13}$$

а из соотношений (5) и (6)

$$k = m = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{14}$$

В итоге мы приходим к преобразованию Лоренца

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ r' &= r. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из этих формул видно, что в рамках сделанных нами предположений часы, синхронизованные в одной системе отсчета (и отсчитывающие, следовательно, время $t$), оказываются вовсе не синхронными по отношению ко второй системе, время в которой обозначено как $t'$. Мало того, темп этих двух наборов часов, связанных каждый со своей системой отсчета, оказывается различным. Каждый из наблюдателей обнаружит, что часы другой системы идут медленнее на величину $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. К этому выводу наблюдатель приходит, конечно, сравнивая одни-единственные часы своего коллеги с несколькими часами своей системы, мимо которых проходят в разные моменты времени «чужие» часы.

Каждый из наблюдателей, рассматривая стандартный (единичный) масштаб другой системы, расположенный по направлению движения (ось $x$ или ось $x'$ соответственно), обнаружит, что размеры этого масштаба уменьшаются в $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ раз. Каждый из наблюдателей измеряет длину стандартного масштаба другой системы, делая отметки на своей координатной оси, где начало и конец стандартного масштаба проходят в один и тот же момент времени (времени наблюдателя, относительно которого движется стержень).

В заключение отметим, что преобразования Лоренца «обратимы». Если формулы преобразования (15) разрешить относительно $x$, $t$, выразив их через $x'$, $t'$, мы придем к тем же самым выражениям, где штрихованные и нештрихованные величины поменяются местами, а скорость $v$ изменит знак:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ r &= r'. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

### 4. *Гравитационный радиус (радиус Шварцшильда)*

В нерелятивистской механике полная энергия тела, движущегося под действием силового поля, представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии; эта сумма не меняется при движении тела.

Кинетическая энергия тела зависит только от его массы и скорости и определяется по формуле

$$K = \frac{1}{2} mv^2,$$

где $m$ — масса тела, а $v$ — его скорость. Потенциальная энергия тела зависит от характера силового поля и по-