стемой отсчета, оказывается различным. Каждый из наблюдателей обнаружит, что часы другой системы идут медленнее на величину $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. К этому выводу наблюдатель приходит, конечно, сравнивая одни-единственные часы своего коллеги с несколькими часами своей системы, мимо которых проходят в разные моменты времени «чужие» часы.

Каждый из наблюдателей, рассматривая стандартный (единичный) масштаб другой системы, расположенный по направлению движения (ось x или ось x' соответственно), обнаружит, что размеры этого масштаба уменьшаются в $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ раз. Каждый из наблюдателей измеряет длину стандартного масштаба другой системы, делая отметки на своей координатной оси, где начало и конец стандартного масштаба проходят в один и тот же момент времени (времени наблюдателя, относительно которого движется стержень).

В заключение отметим, что преобразования Лоренца «обратимы». Если формулы преобразования (15) разрешить относительно x, t, выразив их через x', t', мы придем к тем же самым выражениям, где штрихованные и нештрихованные величины поменяются местами, а скорость v изменит знак:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ r &= r'. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

4. Гравитационный радиус (радиус Шварцшильда)

В нерелятивистской механике полная энергия тела, движущегося под действием силового поля, представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии; эта сумма не меняется при движении тела.

Кинетическая энергия тела зависит только от его массы и скорости и определяется по формуле

$$K = \frac{1}{2} mv^2,$$

где m — масса тела, а v — его скорость. Потенциальная энергия тела зависит от характера силового поля и положения частицы в этом поле. Если исходить из ньютоновского закона притяжения (т. е. обратной пропорциональности от квадрата расстояния), потенциальная энергия тела, находящегося на расстоянии r от центра массы M, может быть записана в виде

$$P = -\frac{\varkappa m M}{r};$$

здесь $\varkappa$ — гравитационная постоянная Ньютона, равная силе тяготения, действующей между двумя частицами единичной массы, отстоящими друг от друга на расстоянии в одну единицу. Полная энергия тела, находящегося в гравитационном поле другого тела, определяется выражением

$$E = K + P = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{r}\varkappa m M.$$

Кинетическая энергия тела всегда положительна; потенциальная энергия гравитационного поля всегда отрицательна. Если полная энергия $E > 0$, то траектория движения частицы может уйти на неограниченное удаление — это будет движение по одной из ветвей гиперболы. Если $E < 0$, траектория частицы всегда будет находиться в окрестности тела массы M, причем эта траектория будет эллипсом. Две эти возможности — периодическое движение и уход на бесконечность — отделены друг от друга значением $E = 0$, при котором траектория становится параболой; в этом случае скорость тела при неограниченном удалении от центра массы M стремится к нулю. Это предельный случай определяет *скорость отрыва*, т. е. наименьшую скорость, которую может иметь тело, чтобы удалиться, находясь первоначально на расстоянии r от тела M, на бесконечность. Для $E=0$ скорость v определяется выражением

$$v = \left(\frac{2\varkappa M}{r}\right)^{1/2}.$$

Это и есть скорость отрыва для частицы, находящейся в начальный момент на расстоянии r от центра. На поверхности Земли, например, скорость отрыва оказывается примерно равной 11,2 *км/сек.*

Скорость отрыва зависит от исходного расстояния от центра гравитационного притяжения, т. е. от центра масс M. Чем больше исходное расстояние, тем меньше требуется начальная скорость, чтобы частица могла уйти на бесконечность Наоборот, если мы хотим отправить тело на бесконечность и есть возможность сообщить телу значительную скорость, то исходное расстояние этого тела от центра тяготения может быть невелико. Допустим, что нас интересует расстояние, начиная с которого скорость отрыва будет равна скорости света c (мы пренебрегаем всеми эффектами теории относительности). Тогда это расстояние окажется равным

$$R = \frac{2\varkappa M}{c^2};$$

это и есть выражение для гравитационного радиуса.

Только что проделанное вычисление предельно легкомысленно. Прежде всего релятивистская динамика утверждает, что скорость материальных тел никогда не достигает значения, равного скорости света. Далее, релятивистское выражение для кинетической энергии при скоростях частиц, сравнимых со скоростью света, существенно отличается от использованного выше нерелятивистского выражения. Наконец, геометрия пространства, окружающего шварцшильдовскую массу, заметно отличается от геометрии плоского пространства, так что величина r уже не является мерой расстояния в обычном смысле. Единственным оправданием использования полученного результата могло бы быть то, что, несмотря на совершенно легкомысленные вычисления, опирающиеся на заведомо неправильные теоретические предположения, мы приходим, как иногда бывает, к выражению, дающему правильный порядок величин. В нашем случае нерелятивистский расчет приводит в точности к тому же выражению, которое получил Шварцшильд на основе последовательного релятивистского рассмотрения. Это, разумеется, просто счастливая случайность. Зависимость радиуса кривизны r_c пространства-времени в решении Шварцшильда от (координатного) расстояния от центра r_c дается формулой

$$r_c = R^{-1/2} r^{3/2},$$

где R — гравитационный радиус. Если r равно гравитационному радиусу, все три величины R, r и r_c равны. На поверхности Земли радиус кривизны пространства-времени (кривизны, обусловленной самой Землей) составляет около 10^8 *км*; это расстояние равно радиусу орбиты Земли при движении вокруг Солнца.

5. *Гравитационное излучение*

В Дополнении 2 было показано, что из третьего закона Кеплера следует для закона всемирного тяготения обратно пропорциональная зависимость от квадрата расстояния, впервые указанная Ньютоном. Запишем этот закон в виде

$$a = \frac{\varkappa \cdot m}{r^2},$$

где a — ускорение, возникающее под действием тела, обладающего массой m и расположенного на расстоянии r (постоянная $\varkappa$, как всегда, ньютоновская гравитационная постоянная). Из этого закона вытекает, что для круговой орбиты радиуса d, на которой центростремительное ускорение равно

$$a = \frac{v^2}{d},$$

отношение линейной скорости на орбите v к скорости света c можно выразить через гравитационный радиус R, введенная в Дополнение 3:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{R}{d}.$$

Это отношение равно также отношению кинетической энергии системы к энергии покоя системы. Действительно, кинетическая энергия с точностью до множителя $^1/_2$ равна mv^2, а энергия покоя mc^2.

Период обращения должен быть того же порядка величины, что и время, необходимое, чтобы тело, обладающее скоростью v, прошло расстояние, равное радиусу орбиты d:

$$T_p \sim \frac{d}{v} = \frac{d}{c}\left(\frac{d}{R}\right)^{1/2}.$$

Первый множитель в последнем звене равенства определяет время, необходимое свету для прохождения рас-