

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

*

О системах отсчета уже говорилось, причем упоминалась декартова система координат. В этой главе будет подробно исследована связь между различными системами отсчета и различными системами координат.

Преобразования координат, независящие от времени. В качестве типичного примера рассмотрим геоцентрическую систему отсчета, т. е. систему отсчета, твердо связанную с Землей. Для точного определения положения точки относительно Земли введем систему координат. Выберем начало координат, скажем в центре земного шара, и направления трех осей, например ось X можно направить из центра Земли в точку пересечения экватора с гринвичским меридианом, ось Y — в точку пересечения экватора с меридианом 90° восточной долготы и ось Z — через северный полюс. Положение любой точки определится тогда тремя действительными числами, координатами данной точки. Движение точки полностью описывается заданием ее трех координат как функций времени. Если эти функции являются постоянными, точка поконится относительно выбранной системы отсчета. Наряду с упомянутой системой отсчета с таким же успехом можно ввести и другие системы, также твердо связанные с Землей. Например, мы можем выбрать начало координат в любой точке поверхности Земли и направить ось X , скажем, на восток, ось Y — на север, а ось Z — вертикально вверх, т. е. от центра Земли (Земля предполагается сферической).

Связь между двумя координатными системами полностью определена, если координаты произвольной точки в одной системе заданы как функции ее координат в другой си-

стеме. Обозначим первую систему координат через S , а вторую — через S' , координаты некоторой точки P относительно S — через (x, y, z) , а координаты той же точки относительно S' — через (x', y', z') . Тогда x' , y' и z' связаны с x , y и z уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + \overset{0}{x'}, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + \overset{0}{y'}, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + \overset{0}{z'}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где (x', y', z') — координаты начала координат системы S в системе S' . Постоянные c_{ik} являются косинусами углов между осями систем S и S' , c_{11} соответствует углу между осями X и X' , c_{12} — углу между Y и X' , c_{21} — между X и Y' , и так далее.

Переход от одной системы координат к другой называется преобразованием координат, а уравнения, связывающие координаты точки в двух системах координат, называются уравнениями преобразования.

Системы координат необходимы не только для описания положения, но и для представления векторов. Рассмотрим какое-либо векторное поле, например электростатическое поле, в окрестности точки P . Величина и направление напряженности электрического поля E в P полностью определяются заданием компонент E относительно выбранной системы координат S . Обозначим компоненты E в точке P относительно системы S через E_x , E_y и E_z . Компоненты E в той же точке P относительно другой системы, например S' , можно получить, зная уравнения преобразования системы координат S в S' . Эти новые компоненты E'_x , E'_y и E'_z не зависят от переноса начала координат, т. е. от постоянных x' , y' и z' в уравнениях (1.1). E'_x является суммой проекций E_x , E_y и E_z

на ось X' ; E'_y и E'_z определяются аналогично и таким образом:

$$E'_x = c_{11}E_x + c_{12}E_y + c_{13}E_z,$$

$$E'_y = c_{21}E_x + c_{22}E_y + c_{23}E_z,$$

$$E'_z = c_{31}E_x + c_{32}E_y + c_{33}E_z.$$

Закон, определяющий преобразование компонент какой-либо величины в заданной точке из одной системы координат в другую, называется законом преобразования.

Преобразования координат, содержащие время. До сих пор мы рассматривали только такие преобразования, при которых обе системы координат были твердо связаны с одним и тем же телом, например с Землей. Однако преобразование координат дает возможность исследовать связь и между двумя движущимися друг относительно друга системами отсчета. В этом случае каждой системе отсчета соответствует своя система координат.

Сравним систему отсчета, твердо связанную с Землей, с системой, твердо связанной с ньютоновским ведром, вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Мы можем ввести две системы координат, которые дают возможность определить положение некоторой точки в каждой системе отсчета. Обозначим эти системы координат соответственно через S (это S не идентично с прежним S) и S^* , причем поместим начала координат обеих систем в одной и той же точке на оси ведра, а оси Z и Z^* пусть совпадают и направлены вертикально вверх. Если ведро вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно Земли и в момент $t=0$ ось X параллельна оси X^* , то уравнения преобразования имеют следующий вид (фиг. 1):

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \cos \omega t \cdot x + \sin \omega t \cdot y, \\ y^* &= -\sin \omega t \cdot x + \cos \omega t \cdot y, \\ z^* &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) по форме аналогичны уравнениям (1.1), однако здесь косинусы углов между осями уже не постоян-

ные величины, а функции времени. Движение двух систем отсчета друг относительно друга определяется зависимостью ϵ_{ik} от времени.

Уравнения (1.2) дают связь между двумя вращающимися друг относительно друга системами отсчета. Часто нас интересует связь между двумя системами, движущимися друг относительно друга равномерно и прямолинейно. В этом случае системы координат S и S^* удобно выбрать так, чтобы их соответствующие оси были параллельны и начала координат совпадали в момент $t=0$. Тогда уравнения преобразования имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} x^* = x - v_x t, \\ y^* = y - v_y t, \\ z^* = z - v_z t, \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

где v_x , v_y и v_z — компоненты скорости системы S^* относительно S .

Вид уравнений преобразования (1.2) и (1.3) зависит, конечно, от относительного движения двух систем отсчета, но он зависит также и от определенных предположений относительно природы пространства и времени; мы предполагаем, что возможно определение времени t вне зависимости от выбора системы отсчета, другими словами, что возможно построить часы, ход которых не зависит от состояния их движения. Это предположение в уравнениях преобразования выражается в том, что отсутствует уравнение, дающее преобразование времени. При желании можно добавить уравнение

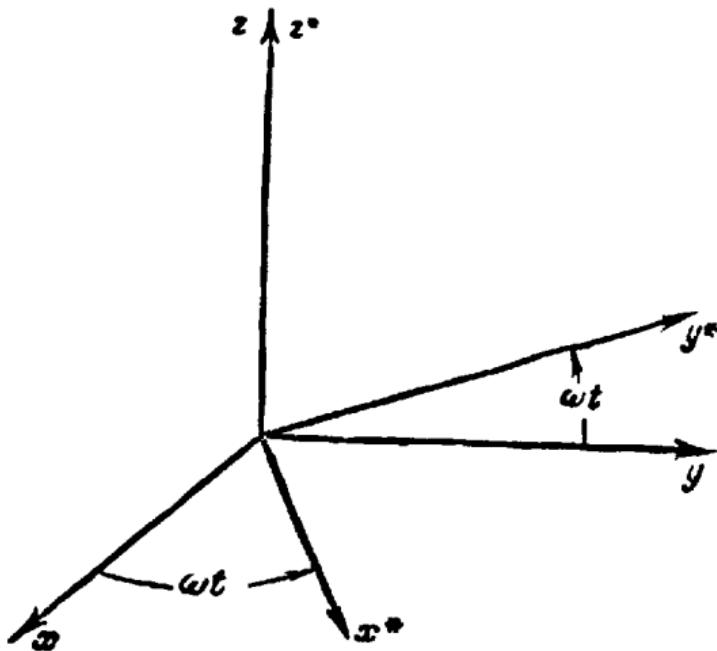
$$t^* = t, \quad (1.4)$$

явно выражающее универсальный характер времени.

Другое предположение касается измерения длин. Мы предполагаем, что расстояние между двумя точками (которые могут быть частицами) в данный момент времени не зависит от выбора системы отсчета, т. е. мы предполагаем, что можно построить твердые линейки (стержни),

длина которых не зависит от их состояния движения. Уравнения (1.3) особенно ясно показывают, как это предположение отражается уравнениями преобразования. Так как расстояние между двумя точками P_1 и P_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) равно

$$s_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (1.5)$$



Фиг. 1. Система координат S^* с координатами (x^*, y^*, z^*) вращается относительно системы координат S с координатами (x, y, z) с угловой скоростью ω .

то очевидно, что в любой момент времени справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} &= \\ &= \sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В дальнейшем нам придется возвратиться к этим предположениям.