Глава II

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*

Закон инерции, инерциальные системы. Механика Галилея — Ньютона была первой областью физики, ставшей наиболее развитой экспериментальной наукой. Прежде всего был установлен закон инерции: *тела, не взаимодействующие с другими телами, продолжают оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Другими словами, движение таких тел является неускоренным.*

Чтобы выразить закон инерции в математической форме, мы будем описывать положение тела его тремя координатами: x, y и z. Если тело не находится в состоянии покоя, его координаты являются функциями времени. Согласно закону инерции, когда на тело не действуют силы, вторые производные этих трех функций, т. е. ускорения, обращаются в нуль:

$$\ddot{x}=0, \quad \ddot{y}=0, \quad \ddot{z}=0. \tag{2.1}$$

$\left(\text{Мы пользуемся обычным обозначением } \ddot{x} \text{ вместо } \frac{d^2x}{dt^2}\right)$.

Первый интеграл уравнений (2.1) выражает постоянство трех компонент скорости:

$$\dot{x}=\overset{0}{u_x}, \quad \dot{y}=\overset{0}{u_y}, \quad \dot{z}=\overset{0}{u_z}. \tag{2.2}$$

Уравнения, выражающие закон инерции, содержат координаты и относятся поэтому к определенной системе координат. Пока система координат не выбрана, закон инерции в том виде, как он сформулирован выше (см. курсив), еще не имеет точного смысла. Для любого тела мы всегда можем ввести систему отсчета, в которой оно покоится и, следовательно, не ускорено. Правильная фор-

мулировка такова: *существует система (или системы) координат, относительно которой все тела, не испытывающие действия сил, движутся неускоренно. Системы координат, обладающие такими свойствами, и соответствующие им системы отсчета называются инерциальными системами.*

Конечно, не все системы отсчета являются инерциальными. Например, будем исходить из инерциальной системы координат S и произведем преобразование (1.2) к системе S^*, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно S. Чтобы получить законы преобразования уравнений (2.1) и (2.2), продифференцируем уравнения преобразования (1.2) сначала один, а затем второй раз по времени t. Получающиеся уравнения содержат x, y, z, x^*, y^*, z^* и их первые и вторые производные по времени.

Мы предположили, что система координат S инерциальна. Поэтому подставим вместо $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ и $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ соответственно выражения (2.1) и (2.2). Таким образом, получаем для координат, отмеченных звездочкой и их производных,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= \omega y^* + \overset{0}{u}_x \cos \omega t + \overset{0}{u}_y \sin \omega t, \\ \dot{y}^* &= -\omega x^* + \overset{0}{u}_y \cos \omega t - \overset{0}{u}_x \sin \omega t, \\ \dot{z}^* &= \overset{0}{u}_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}^* &= \omega^2 x^* + 2\omega \dot{y}^*, \\ \ddot{y}^* &= \omega^2 y^* - 2\omega \dot{x}^*, \\ \ddot{z}^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Оказывается, что в системе координат S^* не все вторые производные по времени исчезают. Иногда бывает удобно перейти к системе отсчета, в которой появляющиеся ускорения обусловлены не действительным взаимодействием тел. Умноженные на массы, эти ускорения трактуются как

реальные силы и большей частью носят название „сил инерции". Несмотря на это название, они не являются настоящими силами; они только формально входят в уравнения так же, как обычные силы. В нашем случае первые члены $\omega^2 x^*$, $\omega^2 y^*$, умноженные на массу, называются „центробежными силами", а последние члены, также умноженные на массу, называются силами Кориолиса.

С другой стороны, существуют типы преобразований координат, оставляющие формы закона инерции (2.1) неизмененными. В качестве такого случая рассмотрим раньше всего преобразования типа (1.1), не связанные с переходом к новой системе отсчета. Дифференцированием (1.1) с подстановкой $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и так далее из (2.1) и (2.2) получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}' &= c_{11}\overset{0}{u}_x + c_{12}\overset{0}{u}_y + c_{13}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}'_x, \\ \dot{y}' &= c_{21}\overset{0}{u}_x + c_{22}\overset{0}{u}_y + c_{23}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}'_y, \\ \dot{z}' &= c_{31}\overset{0}{u}_x + c_{32}\overset{0}{u}_y + c_{33}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}'_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

и

$$\ddot{x}' = \ddot{y}' = \ddot{z}' = 0. \tag{2.6}$$

Компоненты скорости, как и следовало ожидать, преобразуются, как компоненты вектора, а уравнения (2.1) воспроизводятся в новых координатах без изменения своего вида.

Другое преобразование, сохраняющее вид закона инерции, есть преобразование типа (1.3). Оно соответствует переходу от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Дифференцируя (1.3) два раза, получим:

$$\ddot{x}^* = \ddot{x}, \quad \ddot{y}^* = \ddot{y}, \quad \ddot{z}^* = \ddot{z}, \tag{2.7}$$

и, если движение тела в системе S подчиняется закону инерции (2.1), мы имеем также:

$$\ddot{x}^* = \ddot{y}^* = \ddot{z}^* = 0, \tag{2.8}$$

в то время как первые производные отмеченных звездочкой координат [если уравнения (2.2) относятся к неотмеченным звездочкой координатам] равны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= \overset{0}{u}_x - v_x = \overset{0}{u}{}^*_x, \\ \dot{y}^* &= \overset{0}{u}_y - v_y = \overset{0}{u}{}^*_y, \\ \dot{z}^* &= \overset{0}{u}_z - v_z = \overset{0}{u}{}^*_z. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8) показывают, что закон инерции выполняется в новой системе так же, как и в старой. Уравнения (2.9) выражают тот факт, что скорость в новой координатной системе S^* равна разности скорости в старой системе и относительной скорости обеих систем. Этот закон часто называют (классическим) законом сложения скоростей.

Системы отсчета и системы координат, в которых справедлив закон (2.1), являются инерциальными системами. Все декартовы системы координат, покоящиеся относительно инерциальной системы координат, сами являются также инерциальными системами. Декартовы системы координат, связанные с системой отсчета, равномерно и прямолинейно движущейся относительно некоторой инерциальной системы, также являются инерциальными системами. С другой стороны, если мы перейдем к новой системе отсчета, ускоренно движущейся относительно первой, то преобразования координат в этой новой системе не приведут к уравнениям (2.1). Ускорение новой системы отсчета относительно инерциальной системы проявляется в появлении ускорения тел, не связанного с наличием реальных сил.

Преобразования Галилея. Если какой-либо закон не изменяет своего вида при некоторых преобразованиях координат, т. е., если он одинаково выражается в различных координатах, говорят, что этот закон инвариантен или ковариантен относительно рассматриваемого преобразования. Закон инерции (2.1) ковариантен относительно преобразований (1.1) и (1.3), но не относительно (1.2).

Преобразования (1.1) и (1.3) весьма важны для дальнейшего. Обычно их называют преобразованиями Галилея. Согласно классической физике, любые две инерциальные системы связаны преобразованием Галилея.

Закон сил и его трансформационные свойства. Рассмотрим трансформационные свойства основных законов классической механики. Эти законы могут быть сформулированы следующим образом.

Тела, находящиеся под действием сил, приобретают ускорения, пропорциональные этим силам. Отношение силы к ускорению для данного тела есть величина постоянная, называемая массой тела.

Полная сила, действующая на тело, есть векторная сумма всех сил, обусловленных другими телами данной механической системы. Другими словами, полное взаимодействие системы тел составляется из взаимодействий отдельных пар. Силы, с которыми два тела действуют одно на другое, направлены по прямой, их соединяющей, равны по величине и противоположно направлены; то есть два тела могут либо отталкиваться, либо притягиваться друг к другу. Величина этих сил является функцией только расстояния между ними; ни скорости, ни ускорения тел на ее величине не сказываются.

Эти законы применимы для таких явлений, как гравитация, электростатика и силы Ван-дер-Ваальса; к электродинамике они неприменимы, так как взаимодействие между магнитными полями и электрическими зарядами приводит к силам, которые направлены не по прямой, соединяющей заряд и источник поля, и величина которых зависит не только от положений, но и от скоростей заряженных тел.

Но если только выполняются приведенные выше условия, то силы можно представить как отрицательный градиент потенциальной энергии. Последняя является суммой потенциальных энергий, характеризующих взаимодействие

двух тел или „точечных масс“,

$$\left.\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} V_{ik}(s_{ik}), \quad i < k, \\ s_{ik} &= \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Индексы i и k относятся к взаимодействию между i-й и k-й точечными массами, а s_{ik} — расстояние между ними. Функция $V_{ik}(s_{ik})$ определяется характером рассматриваемой задачи, например задается законом Кулона, законом тяготения Ньютона и т. д.

Сила, действующая на i-ю точечную массу, равна:

$$\left.\begin{aligned} f_{i,x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{x_i - x_k}{s_{ik}} \\ f_{i,y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{y_i - y_k}{s_{ik}} \\ f_{i,z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{z_i - z_k}{s_{ik}} \end{aligned}\right\} k \neq i \quad (2.11)$$

Из вида системы уравнений (2.11) явствует, что компоненты силы, обусловленные взаимодействием только i-го и k-го тел, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, так что

$$\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}.$$

Поэтому сумма всех сил, действующих на все n точечных масс, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,z} = 0. \quad (2.12)$$

Дифференциальные уравнения движения тел таковы:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= f_{i,x}, \\ m_i\ddot{y}_i &= f_{i,y}, \\ m_i\ddot{z}_i &= f_{i,z}, \end{aligned}\right\}$$

где m_i — масса i-го тела.

Мы покажем теперь, что система уравнений, определяющая поведение механической системы — (2.10), (2.11) и (2.13), — ковариантна относительно преобразований Галилея.

Будем исходить из выражений (2.10). Функция V зависит от расстояний s_{ik} различных точечных масс друг от друга. Как будут преобразовываться s_{ik} при преобразовании координат (1.1) или (1.3)? Чтобы ответить на этот вопрос, надо иметь в виду, что координаты i-го и k-го тела должны быть взяты в один и тот же момент времени; другими словами, расстояние между двумя телами есть функция времени. Конечно, координаты различных точечных масс преобразуются независимо друг от друга, каждая совокупность (x_i, y_i, z_i) преобразуется согласно уравнениям (1.1) и (1.3).

Легко видеть, что при преобразовании (1.3), соответствующем равномерному прямолинейному движению, разности координат двух точек, например $x_i - x_k$, остаются неизменными

$$x_i^* - x_k^* = x_i - x_k. \tag{2.14}$$

Поэтому и s_{ik} имеют в новой системе координат S^* тот же вид, что и в старой системе S.

Уравнения преобразования (1.1) дают связь между двумя системами координат с непараллельными осями, покоящимися друг относительно друга. Очевидно, что расстояние между двумя точками выражается в таких систе-

мах координат одинаково, так что:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2}=\\&=\sqrt{(x'_i-x'_k)^2+(y'_i-y'_k)^2+(z'_i-z'_k)^2};\\&s_{ik}=s'_{ik}.\end{aligned}\right\}\quad(2.15)$$

Величина, не меняющая своего значения (в данной точке) при некотором преобразовании координат, называется инвариантом по отношению к этому преобразованию. Расстояние между двумя точками является, таким образом, инвариантом.

Мы видим, что аргументы функции V, т. е. величины s_{ik}, инвариантны относительно преобразования Галилея. Поэтому и сама функция V, полная потенциальная энергия механической системы, также инвариантна по отношению к этому преобразованию; в новой системе координат она имеет ту же форму и принимает те же значения, что и в первоначальной системе. Уравнение (2.10) ковариантно относительно преобразований Галилея.

Покажем теперь инвариантность уравнений (2.11) относительно преобразования (1.3). Правая часть уравнений (2.11) содержит производные по инвариантным величинам. Производные по новым координатам связаны с производными по старым координатам следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial x_i^*},\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=\frac{\partial V}{\partial y_i^*},\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=\frac{\partial V}{\partial z_i^*};\qquad(2.16)$$

таким образом, правая часть уравнений (2.11) инвариантна относительно преобразования (1.3). Справедливо ли то же самое и для левой части, можно решить только после рассмотрения трансформационных свойств уравнений (2.13). Разумеется, уравнения остаются справедливыми и в новых координатах только в том случае, если обе их стороны преобразуются одинаковым образом. В противном случае они не ковариантны относительно рассматриваемого преобразования. Мы должны выяснить, являются ли трансформационные свойства правой части уравнений (2.11) совмести-

мыми с трансформационными свойствами левой части уравнений (2.13), поскольку закон преобразования силы $\mathbf{f}_i$ определяется обеими этими системами уравнений.

Преобразуем сперва, согласно (1.1), правую часть уравнений (2.11). Применяя правила дифференцирования функций многих переменных, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{11} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{21} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{31},\\
\frac{\partial V}{\partial y_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{12} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{22} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{32},\\
\frac{\partial V}{\partial z_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{13} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{23} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{33}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

$3n$ уравнений (2.17) можно разбить на n групп, по 3 уравнения в каждой; группы отличаются друг от друга только значением i. Каждая из этих групп преобразуется, как компоненты вектора, т. е. компонента в направлении некоторой оси в одной системе равна сумме проекций на эту ось трех компонент в другой системе координат.

Преобразуются ли левые части уравнений (2.11) так же, как компоненты вектора, может быть решено после рассмотрения трансформационных свойств уравнений (2.13). Левые части уравнений (2.13) представляют собой произведение масс на ускорения. Мы уже установили, что в классической физике масса рассматривается как постоянная, характеризующая данное тело, не зависящая от его состояния движения и инвариантная относительно преобразования координат.

То, что ускорение тела инвариантно относительно преобразования (1.3), мы уже видели из уравнений (2.7). Поэтому левые части уравнений (2.13) преобразуются по (1.3) так же, как правые части уравнений (2.11).

Возвращаясь к преобразованиям (1.1), мы видим, что

$$\ddot{x}_i' = c_{11}\ddot{x}_i + c_{12}\ddot{y}_i + c_{13}\ddot{z}_i \quad \text{и т. д.}, \qquad (2.18)$$

но так как c_{ab} представляют собой косинусы углов и

величина этих косинусов не зависит от знака угла

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha),$$

то очевидно также, что

$$\ddot{x}_i = c_{11}\ddot{x}_i' + c_{21}\ddot{y}_i' + c_{31}\ddot{z}_i' \quad \text{и т. д.} \qquad (2.18a)$$

Опять-таки, левые части уравнений (2.13) преобразуются точно таким же образом, как правые части уравнений (2.11), в этом случае, как n векторов.

Уравнения (2.13) можно рассматривать, как уравнения, определяющие силы $\mathbf{f}_i$. Отсюда заключаем, что сами силы преобразуются так, что оба уравнения (2.11) и (2.13) ковариантны. *По отношению к пространственным ортогональным преобразованиям координат силы являются векторами; силы инвариантны относительно преобразований, представляющих равномерное прямолинейное движение одной системы координат относительно другой.* Эти соотношения могут быть представлены в несколько иной форме. Исключая $\mathbf{f}_i$ из уравнений (2.11) и (2.13), получим из них следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} + m\ddot{x}_i &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y_i} + m\ddot{y}_i &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} + m\ddot{z}_i &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Эти уравнения выражают те же физические положения, что и уравнения (2.11) и (2.13), но не выявляют столь ясно трансформационные свойства силы.

Результатом приведенных выше рассуждений является то, что обе стороны каждого из уравнений (2.11) и (2.13) преобразуются одинаковым образом, и поэтому эти уравнения остаются справедливыми после произвольного преобразования Галилея.

Уравнения, которые совершенно не изменяются при преобразовании (т. е. члены которых являются инвариан-

тами) называются инвариантными. Уравнения, которые остаются справедливыми в силу того, что их члены, не являющиеся инвариантными, преобразуются по одним и тем же законам [как, например, члены $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ и $m\ddot{x}_i$ и тому подобные в уравнениях (2.19)], называются ковариантными.

Ковариантность уравнений является математическим свойством, которое соответствует существованию принципа относительности для физических законов, описывающихся этими уравнениями. Действительно, принцип относительности классической механики эквивалентен нашему результату, согласно которому законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах, т. е. во всех тех системах координат, которые получаются из некоторой инерциальной системы произвольным преобразованием Галилея.

Другие разделы механики, такие, как механика сплошных сред (теория упругости и гидродинамика) или механика твердых тел, могут быть получены из механики точки путем введения соответствующих энергий взаимодействий типа (2.10) и некоторого предельного перехода. И без подробного рассмотрения этих областей механики очевидно, что полученные результаты применимы к ним в такой же мере, как и к рассмотренным выше законам движения свободных точечных масс.