Глава IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНТЦА

*

Несколько десятилетий экспериментальных исследований показали, что невозможно обнаружить движение Земли сквозь «эфир». Все указывает на то, что существует «принцип относительности» в оптике и электродинамике, хотя преобразования Галилея и исключают эту возможность.

Тем не менее, Фицжеральд и особенно Лорентц сделали попытки сохранить обычные уравнения преобразования и в то же время теоретически объяснить результаты экспериментов. Лорентц сумел показать, что движение системы отсчета относительно эфира со скоростью v дает только «эффект второго порядка» т. е., что все наблюдаемые отклонения от законов, справедливых в системе отсчета, связанной с эфиром, пропорциональны не v/c, а $(v/c)^2$.

Один из этих ожидаемых эффектов второго порядка заключается в том, что в системе, движущейся относительно эфира, световой луч будет проходить некоторое расстояние в оба конца (т. е. туда и обратно), в направлении, параллельном движению системы, за большее время, чем то же расстояние в перпендикулярном направлении. Опыт Майкельсона-Морлея предназначался для измерения этого эффекта. Чтобы объяснить отрицательный результат эксперимента, Фицжеральд и Лорентц предположили, что масштабы и другие «твердые» тела, движущиеся сквозь эфир, сокращаются в направлении движения как раз в таком отношении, чтобы скомпенсировать изменения времени распространения света. Эта гипотеза полностью сохраняет привилегированный характер определенной системы отсчета (эфира). Отрицательный результат опыта Майкельсона-Морлея приписывается при этом не существованию оптического принципа относительности, а неблагоприятному сочетанию

эффектов, которое делает невозможным экспериментальное обнаружение движения Земли сквозь эфир.

В противоположность этому Эйнштейн истолковал результаты экспериментов как решающее доказательство того, что принцип относительности справедлив в электродинамике так же, как и в механике. Поэтому он подверг анализу уравнения преобразования Галилея и постарался видоизменить их таким образом, чтобы они стали совместимы с принципом относительности в оптике. Мы воспроизведем теперь этот анализ с целью получения новых законов преобразования.

При написании уравнений преобразования мы всегда делали два предположения, на которые, впрочем, не всегда обращали особое внимание: именно, что существует универсальное время t, определенное независимо от системы координат или системы отсчета, и что расстояние между двумя одновременными событиями является инвариантом, значение которого не зависит от выбора системы координат.

Относительный характер одновременности. Рассмотрим первое предположение. Определяя универсальное время, мы сталкиваемся с необходимостью определения понятия одновременности. Мы можем сравнить и синхронизовать приборы, измеряющие время (часы), только если утверждение «два события A и B одновременны» имеет смысл независимо от системы отсчета. То, что это возможно, является одним из наиболее важных допущений классической физики. Это допущение стало составной частью нашего способа мышления, так что почти каждый испытывает большие трудности при анализе его фактической основы.

Для проверки этой гипотезы мы должны представить себе эксперимент, который позволит решить, являются ли два события одновременными. Без такого эксперимента (который может быть осуществлен по крайней мере принципиально) утверждение «два события A и B одновременны» лишено физического смысла.

Если два события происходят в близких точках пространства, мы можем пользоваться прибором, в некоторых

отношениях подобным счетчикам, работающим на совпадениях, которые применяются при исследовании космических лучей. Этот прибор будет реагировать только на события, происходящие одновременно.

Если два события происходят на значительном расстоянии друг от друга, то такой прибор нельзя использовать для наших целей. В этом случае о том, что каждое событие произошло, наш прибор, работающий на совпадениях, должен оповещаться сигналами. Если бы существовали сигналы, распространяющиеся с бесконечно большой скоростью, не возникало бы никаких осложнений. Под «бесконечной скоростью» сигнализации мы понимаем такую ситуацию, при которой сигнал, идущий из точки P_1 в некоторую точку P_2 и обратно, возвращается в P_1 в тот же момент времени, в который он из нее вышел.

К сожалению, сигналов, обладающих такими свойствами, не существует. Все существующие сигналы требуют конечного времени для распространения в некоторую точку и обратно, причем это время увеличивается с проходимым сигналом расстоянием. При выборе типа сигнала мы, конечно, предпочтем сигналы, скорость распространения которых зависит от как можно меньшего числа факторов. С этой точки зрения электромагнитные волны наиболее подходящи, так как для их распространения не требуется присутствия материальной среды, их скорость в пустоте не зависит от направления, длины волны и интенсивности. Регистрирующим прибором могут служить два счетчика фотонов, работающие на совпадениях.

Чтобы учесть потерю времени на передачу сигналов, поместим наш прибор на середине прямой, соединяющей точки, в которых происходят события A и B. Каждое событие, когда оно происходит, сопровождается излучением светового сигнала, и мы назовем события одновременными, если оба сигнала одновременно достигают средней точки. Этот эксперимент может служить для определения одновременности двух событий без использования часов. Предполагается, что одновременность, определяемая этим экспериментом, «транзитивна», т. е., что из одновременности

(по нашему определению) A и B и B и C следует одновременность A и C. Следует подчеркнуть, что это предположение является гипотезой, касающейся поведения электромагнитных сигналов.

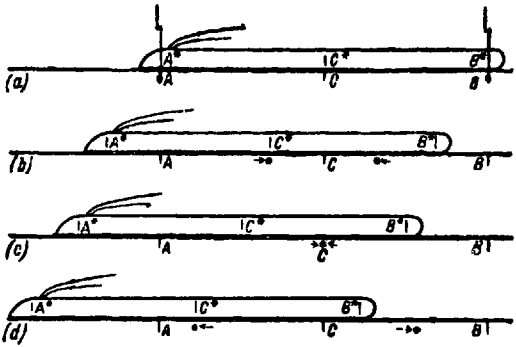
Даже в случае верности этой гипотезы, мы еще не можем быть уверены в том, что наше определение одновременности не зависит от системы отсчета, к которой мы относим описание природы. Локализация двух событий и построение средней точки на связывающей их прямой по необходимости предполагают использование определенной системы координат, находящейся в определенном состоянии движения.

Является ли наше определение одновременности инвариантным относительно перехода к другой системе, находящейся в ином состоянии движения? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим две системы отсчета: одну, связанную с Землей (S), и другую, связанную с длинным поездом (S^*), движущимся прямолинейно с постоянной скоростью. Представим себе двух наблюдателей, одного на земле около пути следования поезда, другого — в поезде. Пусть каждый из наблюдателей снабжен регистрирующим прибором описанного типа и измерительным масштабом. Их масштабы не должны быть обязательно одной и той же длины; существенно, чтобы каждый наблюдатель мог определить середину расстояния между двумя точками на своем теле отсчета — на земле или в поезде.

Предположим, далее, что ударяют две молнии, каждая поражает поезд и землю, оставляя при этом постоянный след. Пусть после этого каждый из наблюдателей обнаружит, что его регистрирующий аппарат находится как раз посередине между двумя следами, оставленными в его системе отсчета. На фиг. 5 отметки молний обозначены через A, B, A^*, B^*, а расположение приборов — через C и C^*. Возможно ли, что световые сигналы, исходящие из A, A^* и B, B^* и приходящие одновременно в C, приходят также одновременно и в C^*?

В тот момент, когда молния ударяет в A и A^*, эти две точки совпадают. То же справедливо для B и B^*.

Если окончательно окажется, что обе молнии ударили одновременно, как кажется наблюдателю на земле (т. е. в системе S), то C^* должно совпадать с C в тот момент, когда A совпадает с A^* и B с B^* (т. е. когда ударяют две молнии) [1].



Фиг. 5. Два события, происходящие в A, A^* и в B, B^*, кажутся одновременными наблюдателю, покоящемуся относительно земли (S), но не наблюдателю, покоящемуся относительно поезда (S^*). В (a) события совершаются, в (b) световой сигнал, вышедший из A, A^*, достигает C^*, в (c) световые сигналы об обоих событиях приходят в C, в (d) световой сигнал из B, B^* достигает C^*.

Из-за того, что требуется конечное время для достижения световым сигналом C и C^*, точка C^* успеет переместиться влево (фиг. 5, b, c, d). Поэтому сигнал, исходящий из A, A^*, достигает C только после прохождения C^* (фиг. 5, b, c), в то время как сигнал из B, B^* достигает C раньше, чем он попадает в C^* (фиг. 5, c, d). В результате наблюдатель в поезде обнаруживает, что сигнал из A, A^* достигает его регистрирующей аппаратуры раньше, чем сигнал из B, B^* (фиг. 5, b, d).

---

[1]) Иначе расстояния A^*C^* и B^*C^* не казались бы равными с точки зрения наблюдателя, находящегося на земле; позже мы объясним, почему мы не делаем предположения такого рода.

Из этого не следует, что земля обладает свойствами, не присущими поезду. Молния может ударить и так, что световые сигналы придут одновременно в точку C^*. В этом случае сигналы из A, A^* приходят в C позже, чем сигналы из B, B^*. Однако невозможен такой случай, чтобы оба прибора — в C и в C^* — указали на одновременность удара молний.

Из этого следует заключить, что два события, одновременные в одной системе отсчета, вообще говоря, не являются одновременными в другой системе отсчета.[1)]

Длина масштабов. Эти выводы заставляют нас изменить наши представления относительности измерения длины. Мы предположили, что наблюдатель на земле и наблюдатель в поезде могут производить измерение длин в своих собственных системах отсчета. Два стержня, покоящиеся в некоторой системе отсчета, считаются равными по длине, если возможно одновременно совместить их концы E с E^* и F с F^*. Два отрезка, отмеченные на телах, движущихся друг относительно друга, могут сравниваться тем же способом, если они параллельны друг другу и перпендикулярны направлению их относительного движения. Однако, если эти отрезки расположены на одной и той же прямой, которая параллельна направлению их относительного движения, их соответственные концы могут совпадать только в определенный момент времени. Два отрезка EF и E^*F^* считаются равными в том случае, когда эти совпадения происходят одновременно. Одновременность же этих событий зависит от системы отсчета наблюдателя. Так, в случае

[1)] Наше определение одновременности, конечно, до некоторой степени произвольно. Однако невозможно придумать эксперимент, при помощи которого одновременность можно было бы определить независимо от системы отсчета. Результаты опыта Майкельсона-Морлея указывают на то, что закон распространения света имеет один и тот же вид во всех инерциальных системах. Если бы результат опыта Майкельсона-Морлея был положительным, другими словами, если бы было возможно определить состояние движения эфира, то мы, естественно, определяли бы одновременность в системе отсчета, связанной с эфиром, и, таким образом, оно приобрело бы абсолютное значение.

удара молнии два отрезка AB и A^*B^* кажутся равными наблюдателю, находящемуся на земле, наблюдатель же в поезде найдет, что совпадение A с A^* произойдет раньше, чем совпадение B с B^*, и заключит, что A^*B^* больше, чем AB. Таким образом, не только одновременность событий, но и результаты измерения длин зависят от выбора системы отсчета.

Ход часов. Вопрос о синхронности двух часов, находящихся на значительном расстоянии друг от друга (т. е. вопрос о том, будут ли стрелки этих часов одновременно находиться в эквивалентных положениях), также определяется системой отсчета наблюдателя. Более того, если двое часов движутся друг относительно друга, мы не можем даже сравнивать их скорости хода, независимо от системы отсчета. Для иллюстрации этого рассмотрим двое часов D и D^*, одни из которых находятся на земле, а другие — в поезде. Предположим, что их показания совпадают, когда D^* проходит мимо D. Если их показания и в дальнейшем будут совпадать, можно считать, что ход D^* и D одинаков. Через определенное время часы D^* и D окажутся на значительном расстоянии друг от друга; тогда, согласно сказанному выше, их стрелки не смогут одновременно занимать эквивалентные положения с точки зрения обоих наблюдателей, находящихся на земле и в поезде.

Преобразования Лорентца. Предыдущие рассуждения помогают нам устранить кажущееся противоречие между законом распространения электромагнитных волн и принципом относительности. Поскольку определить универсальное время невозможно и длина твердых масштабов зависит от выбора системы отсчета, можно себе представить, что скорость света одинакова в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Теперь мы можем показать, что классические преобразования, связывающие две инерциальные системы (уравнения преобразования Галилея) могут быть заменены новыми уравнениями, которые не основываются на предположениях об универсальности

времени и инвариантности длины масштабов, но предполагают с самого начала инвариантный характер скорости света.

Для получения этих новых уравнений преобразования мы примем, что принцип относительности является фундаментальным принципом, т. е. уравнения преобразования не должны содержать ничего такого, что выделяло бы одну инерциальную систему координат по сравнению с другими. Кроме того, мы предположим, что уравнения преобразования сохраняют однородность пространства; все точки пространства и времени должны быть эквивалентны с точки зрения преобразования. Поэтому уравнения преобразования должны быть линейными. По этой же причине мы считали расстояние A^*C^* равным B^*C^* и в системе S и в системе S^* (стр. 52).

Рассмотрим две инерциальные системы S и S^*. Пусть S^* движется относительно S вдоль оси X с постоянной скоростью v; в момент времени $t=0$ в системе S начала координат S и S^* совпадают. Ось X^* параллельна оси X и фактически совпадает с ней. Точки, покоящиеся относительно S^*, движутся со скоростью v в направлении оси X относительно S. Первое из наших уравнений преобразования принимает поэтому следующую форму:

$$x^* = a(x - vt), \tag{4.1}$$

где a — постоянная, которая будет определена ниже.

Не является очевидным, что прямая линия, перпендикулярная к оси X, будет также перпендикулярна к оси X^* (углы должны измеряться, соответственно, наблюдателями в S и S^*). Однако, если этого предположения не сделать, преобразование будет нарушать симметрию относительно оси X. По этим же причинам мы предположим, что оси Y и Z ортогональны с точки зрения любой системы и что то же самое справедливо относительно осей Y^* и Z^*.

Как указывалось ранее, мы можем инвариантным способом сравнивать длины движущихся стержней (отрезков), если они параллельны друг другу и перпендикулярны направлению их относительного движения. Из совпадения их

соответствующих концов следует по принципу относительности, что они имеют одинаковую длину. В противном случае связь между S и S^* не была бы обратимой.

На основе этого можно записать два следующих уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} y^* &= y, \\ z^* &= z. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Для того чтобы система уравнений была полной, мы должны еще написать уравнение, связывающее t^*, т. е. время, измеренное в системе S^*, с временной и пространственными координатами системы S. Из-за принятой нами «однородности» пространства и времени t^* должно зависеть от x, y и z линейно. В силу симметрии предположим далее, что t^* не зависит от y и z. В противном случае показания двух часов, находящихся в плоскости Y^*Z^* системы S^*, не будут совпадать, с точки зрения наблюдателя, в S. Выбирая начало отсчета времени так, чтобы постоянный (не зависящий от координат) член в уравнениях преобразования обращался в нуль, получим

$$t^* = \beta t + \gamma x. \tag{4.3}$$

Наконец, мы должны определить постоянную α в (4.1) и постоянные β и γ в (4.3). Мы увидим, что они определяются двумя условиями: скорость света одинакова в обеих системах S и S^*, и новые уравнения преобразования должны переходить в классические, когда скорость v мала в сравнении со скоростью света c.

Пусть в момент $t=0$ из начала координат системы S, которое в этот момент совпадает с началом системы S^*, излучается сферическая электромагнитная волна. Скорость ее распространения одинакова во всех направлениях и равна c в обеих системах. Распространение волны можно описывать любым из двух следующих уравнений:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{4.4}$$

$$x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = c^2t^{*2}. \tag{4.5}$$

Используя уравнения (4.1), (4.2) и (4.3), можно выразить координаты, отмеченные звездочками в (4.5), через x, y и z:

$$c^2(\beta t+\gamma x)^2=\alpha^2(x-vt)^2+y^2+z^2. \tag{4.6}$$

Собирая однородные члены, получим:

$$(c^2\beta^2-v^2\alpha^2)t^2=(\alpha^2-c^2\gamma^2)x^2+y^2+z^2-2(v\alpha^2+c^2\beta\gamma)xt. \tag{4.7}$$

Это уравнение переходит в уравнение (4.4) только в том случае, когда коэфициенты при t^2 и x^2 в уравнениях (4.7) и (4.4) равны, а коэфициент при xt в (4.7) исчезает. Поэтому:

$$\left.\begin{aligned} c^2\beta^2-v^2\alpha^2&=c^2,\\ \alpha^2-c^2\gamma^2&=1,\\ v\alpha^2+c^2\beta\gamma&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Эти три уравнения решаем относительно неизвестных α, β и γ. Исключением α^2 получаем:

$$\left.\begin{aligned} \beta(\beta+v\gamma)&=1,\\ c^2\gamma(\beta+v\gamma)&=-v.\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Далее, путем исключения γ, получим для β^2:

$$\beta^2=\frac{1}{1-v^2/c^2}. \tag{4.10}$$

Таким образом, величина β, в отличие от классической теории, не равна единице. Однако, выбирая положительный знак корня в (4.10), мы увидим, что при малых v/c значение β почти равно единице, отличаясь от нее лишь во втором порядке. γ определяется уравнением:

$$\gamma=\frac{1-\beta^2}{v\beta}=-\frac{\beta v}{c^2}, \tag{4.11}$$

и наконец, для α находим:

$$\alpha^2=-\frac{c^2\beta\gamma}{v}=\beta^2. \tag{4.12}$$

Здесь опять выбираем положительное значение корня.

Подставляя найденные значения в уравнения (4.1) и (4.3), получаем новые уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= \frac{t - v/c^2 \cdot x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Это так называемые уравнения преобразования Лорентца. При малых значениях v/c они переходят в уравнения преобразования Галилея:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x - vt. \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= t. \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

Различие между (4.13) и (4.14) всюду второго порядка относительно v/c (или x/ct). Справедливость уравнений Лорентца экспериментально можно проверить только в том случае, когда $(v/c)^2$ больше вероятной ошибки опыта. Майкельсон и Морлей в своем знаменитом эксперименте увеличили точность настолько, что сумели измерить эффекты второго порядка и доказать на опыте непригодность уравнений преобразования Галилея.

Решая уравнения (4.13) относительно x, y, z и t, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x^* + vt^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y &= y^*, \\ z &= z^*, \\ t &= \frac{t^* + \frac{v}{c^2} x^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

Сравнивая (4.15) с (4.13), мы видим, что S имеет относительную скорость $(-v)$ по отношению к S^*. Это заключение не тривиально, поскольку ни единица длины, ни единица времени в S и в S^* непосредственно несравнимы.

Скорость светового сигнала, испущенного из любой точки в любой момент времени, равна c во всех системах координат, если она равна c в одной из них, так как пространственные и временные разности координат двух событий преобразуются точно так же, как и сами координаты x, y, z и t.

Преобразования Лорентца не совместимы с классическими представлениями о пространстве и времени. Они устанавливают справедливость принципа относительности по отношению к законам распространения света.

До сих пор мы сравнивали нашу теорию преобразований только с результатами опыта Майкельсона-Морлея. Будет ли она согласоваться также и с явлением аберрации? Мы должны сравнить направление приходящего света в двух системах отсчета: системе, связанной с Солнцем, и системе, связанной с Землей. Величина аберрации зависит от угла между приходящим световым лучом и направлением относительного движения этих двух систем отсчета. Обозначим этот угол через α (в системе, связанной с Солнцем). Направим общую ось X обеих систем вдоль их относительного движения, причем световой луч пусть будет расположен в плоскости XY. В системе, связанной с Солнцем, траектория светового луча определяется посредством

$$x = ct \cdot \cos\alpha, \qquad y = ct \cdot \sin\alpha. \tag{4.16}$$

Уравнения движения в системе, связанной с движущейся Землей, получаются отсюда применением обратных преобразований Лорентца (4.15). Тогда (4.16) приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} x^* + vt^* &= c\left(t^* + \frac{v}{c^2}x^*\right)\cos\alpha, \\ y^*\sqrt{1 - v^2/c^2} &= c\left(t^* + \frac{v}{c^2}x^*\right)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Решая эти уравнения относительно x^* и y^*, получим:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= ct^* \frac{\cos\alpha - v/c}{1 - v/c\cdot\cos\alpha} = ct^* \cos\alpha^*, \\ y^* &= ct^* \frac{\sin\alpha}{1 - v/c\cdot\cos\alpha}\sqrt{1 - v^2/c^2} = ct^* \sin\alpha^*. \end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

Котангенс нового направления равен:

$$\operatorname{ctg}\alpha^* = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.19)$$

Соответственно классическому объяснению, данному на стр 40, этот угол должен был бы определяться соотношением:

$$\operatorname{ctg}\alpha^* = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha. \quad (4.20)$$

Сравнивая (4.19) и (4.20), надо иметь в виду, что отношение v/c мало (порядка 10^{-4}). Поэтому разложим оба соотношения в ряды по степеням v/c. Тогда:

$$\operatorname{ctg}\alpha^*_{\text{rel}} = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \operatorname{ctg}\alpha + \ldots, \quad (4.19a)$$

и

$$\operatorname{ctg}\alpha^*_{\text{class}} = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha. \quad (4.20a)$$

Наблюдаемый эффект — первого порядка, в то время как релятивистские поправки второго порядка находятся за пределами точности эксперимента. Таким образом, релятивистское уравнение (4.19) согласуется с наблюдаемыми фактами.

Таким же образом можно объяснить эксперимент Физо, связывая систему S с землей и систему S^* с движущейся жидкостью. По отношению S^* жидкость покоится, и уравнение движения светового луча таково:

$$x^* = \frac{c}{n}\left(t^* - t_0^*\right). \quad (4.21)$$

Применяя преобразования Лорентца (4.13), получим:

$$x - vt = \frac{c}{n}\left[\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) - t_0^*\sqrt{1 - v^2/c^2}\right]. \quad (4.22)$$

Скорость светового луча в системе S получается решением этого уравнения относительно x:

$$x=\left[\frac{c}{n}-\frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+v/nc}v\right]t+\text{const}. \qquad (4.23)$$

Наблюдаемый эффект оказывается опять первого порядка и находится в согласии с экспериментом.

«Кинематические» эффекты при преобразованиях Лорентца. Изучим теперь более подробно вопрос об измерении длины и времени в различных системах отсчета с точки зрения преобразований Лорентца.

Пусть часы расположены в некоторой точке (x_0^*, y_0^*, z_0^*) в системе S^*. Сравним время, показываемое этими часами, со временем t, измеренным в системе S. Согласно уравнению (4.15) имеем:

$$t=\frac{v/c^2\cdot x_0^*+t^*}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Поэтому временный интервал (t_2-t_1) в системе S выражается через показания часов t_2^* и t_1^* следующим образом:

$$t_2-t_1=(t_2^*-t_1^*)/\sqrt{1-v^2/c^2}. \qquad (4.24)$$

Таким образом, с точки зрения системы S ход часов оказывается замедленным в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз. Но этого мало. Наблюдаемые из системы S часы в различных точках S^*, идя с одинаковой скоростью, тем не менее будут показывать различное время в зависимости от их положения. Чем дальше по оси X^* от начала координат системы S^* расположены часы, тем более отстают их показания с точки зрения системы S. Два события, одновременные в системе S, вообще говоря, не одновременны в системе S^*, и наоборот.

С другой стороны, можно рассматривать ход часов, находящихся в системе S, с точки зрения системы S^*. Пусть часы расположены в точке (x_1, y_1, z_1) и время в S^*

связано со времеием в S уравнением

$$t^* = \frac{t - v/c^2 \cdot x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Как и прежде, показания S-часов связаны с временным интервалом в S^* соотношением:

$$t_2^* - t_1^* = (t_2 - t_1) / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (4.25)$$

S-часы с точки зрения системы S^* оказываются замедленными. Часы, находящиеся на положительной половине оси X, опережают часы, помещенные в начале координат.

Каким же образом наблюдатель в какой-либо системе отсчета обнаруживает, что часы в другой системе идут медленнее? Для того чтобы измерить скорость хода часов T, движущихся относительно наблюдателя, последний сравнивает их показания с показаниями всех часов в его системе, мимо которых проходят часы T. Иначе говоря, S-наблюдатель сравнивает одну пару S^*-часов с последовательностью S-часов, в то время как S^*-наблюдатель сравнивает одну пару S-часов с последовательностью S^*-часов. S^*-часы с течением времени проходят мимо S-часов, все дальше расположенных вдоль положительного направления оси X и поэтому все более и более опережающих часы S^*, поэтому наблюдателю в системе S кажется, что S^*-часы идут медленнее. Наоборот, S-часы проходят мимо S^*-часов, расположенных все дальше и дальше в отрицательном направлении оси X^* и поэтому все более опережающих часы S. Ход S-часов кажется замедленным с точки зрения системы S^*.

В случае измерений длин условия несколько более сложны, так как в уравнения преобразования y и z входят иначе, чем x (ось X — направление относительного движения). Твердый масштаб, перпендикулярный направлению движения, имеет одинаковую длину в обеих системах координат. Если же масштаб параллелен осям X и X^*, надо оговорить, как мы рассматриваем его, в движущейся или в покоящейся системе. Рассмотрим стержень, твердо связанный с S^*, концы которого имеют координаты $(x_1^*, 0, 0)$

и $(x_2^*, 0, 0)$. Его длина в S^* равна

$$l^* = x_2^* - x_1^*. \tag{4.26}$$

Наблюдатель в S определяет длину стержня как разность координат $(x_2 - x_1)$ его концов в один и тот же момент времени t. Координаты x_2^* и x_1^* связаны с координатами x_2, x_1 и t уравнениями (4.13):

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x_2^* &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Отсюда разность координат

$$x_2^* - x_1^* = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4.28}$$

Обозначая $(x_2 - x_1)$ через l, получим:

$$l = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot l^*. \tag{4.29}$$

Стержень кажется укороченным пропорционально множителю $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Этот эффект называется лорентцовым сокращением.

Аналогичное вычисление показывает, что стержень, покоящийся в системе S, кажется укороченным с точки зрения системы S^*.

Итак, получаем следующие правила: *часы, покоящиеся относительно наблюдателя, кажутся ему идущими с наибольшей скоростью. Если они движутся относительно наблюдателя со скоростью v, их ход кажется ему замедленным в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз. Твердое тело имеет с точки зрения наблюдателя наибольшую длину, когда оно по отношению к нему покоится. Движущееся тело кажется сокращенным в направлении движения пропорционально множителю $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, в то время как размеры его в перпендикулярных направлениях остаются неизменными.*

Собственное время. В противоположность классической теории преобразований временные и пространственные интервалы более не являются инвариантными. Однако инвариантный характер скорости света дает возможность ввести другой инвариант. Вернемся к уравнениям (4.1), (4.2), (4.3) и условию (4.8). Рассмотрим два события, пространственные и временные координаты которых соответственно (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Обозначим через τ_{12}^2 разность между квадратом временного интервала и квадратом пространственного интервала, деленным на c^2, так что

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]. \tag{4.30}$$

Соответственно определим аналогичную величину в системе S^*:

$$\tau_{12}^{*2} = (t_2^* - t_1^*)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2\right]. \tag{4.31}$$

Выражая теперь τ_{12}^{*2} в S-переменных, согласно (4.1), (4.2) и (4.3) [аналогично тому, как это мы делали с уравнением (4.5)], получим:

$$\tau_{12}^{*2} = \left(\beta^2 - \frac{a^2 v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(\alpha^2 - c^2\gamma^2)(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] + 2\left(\frac{a^2 v}{c^2} + \beta\gamma\right)(x_2 - x_1)(t_2 - t_1). \tag{4.32}$$

Учитывая, что постоянные α, β и γ подчинены условиям (4.8), легко видеть, что τ_{12}^2 является инвариантом по отношению к уравнениям преобразования (4.13), т. е.

$$\tau_{12}^{*2} = \tau_{12}^2. \tag{4.33}$$

Величина τ_{12} инвариантна также относительно пространственного ортогонального преобразования (1.1).

В дальнейшем мы будем называть все линейные преобразования, по отношению к которым τ_{12}^2 остается инвариантным, преобразованиями Лорентца, независимо от того, происходит относительное движение вдоль оси X или нет. Очевидно, что из инвариантности τ_{12}^2 следует инвариантность скорости света, так как для любых двух точек, лежащих на траектории светового луча, τ_{12}^2 равно нулю.

Каков физический смысл величины τ_{12}^2? Если существует система отсчета, по отношению к которой оба события происходят в одной и той же точке пространства, то τ_{12} (положительный корень из τ_{12}^2) представляет собой время между этими событиями, регистрируемое часами, находящимися в покое относительно этой системы отсчета. Поэтому τ_{12} называется интервалом собственного времени.

Всегда ли существует система отсчета, в которой два события происходят в одной и той же точке пространства? Если бы мы имели дело с классическими уравнениями преобразования, ответ был бы положительным при условии, что эти события не «одновременны». Уравнения преобразования Лорентца (4.13), однако, имеют особенность, когда относительная скорость систем отсчета равна скорости света, т. е, когда $v = c$. При v больших, чем c, x^* и t^* из уравнений (4.13) получаются мнимыми. Уравнения преобразования Лорентца определены, таким образом, только для того случая, когда относительная скорость двух систем отсчета меньше скорости света c. Поэтому если два события следуют столь быстро друг за другом, что временной интервал между ними меньше или равен времени, которое необходимо световому лучу для прохождения пространственного расстояния между этими событиями, то не существует системы отсчета, где данные события имели бы место в одной и той же точке пространства.

Рассмотрим два события, происходящих в двух различных точках пространства. Пусть в этот момент, когда происходит событие в первой точке, из нее выходит световой луч. Если этот луч достигает второй точки как раз в тот

момент, когда в ней происходит событие, то интервал собственного времени τ_{12} между этими двумя событиями равен нулю. Если же этот световой луч приходит во вторую точку уже после того, как в ней произошло событие, интервал между событиями будет отрицательным. В этом случае вместо τ_{12}^2 можно ввести инвариант $\sigma_{12}^2 = -c^2\tau_{12}^2$, то есть

$$\sigma_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \\ - c^2(t_2 - t_1)^2. \qquad (4.34)$$

Для любых двух событий либо τ_{12}, либо σ_{12} вещественно. Если вещественно σ_{12}, то преобразованием Лорентца можно свести $t_2^* - t_1^*$ к нулю. Другими словами, в этом случае существует система отсчета, в которой оба события одновременны. В этой системе отсчета пространственное расстояние между двумя событиями равно просто σ_{12}.

Обычно τ_{12} или σ_{12} выражают пространственно-временной интервал между двумя событиями. Интервал называется временно-подобным, если τ_{12} вещественно, и пространственно-подобным, если σ_{12} вещественно. Являются ли интервалы между двумя событиями временно-подобными или пространственно-подобными, не зависит от выбора системы отсчета или системы координат. Это есть инвариантное свойство двух событий.

Как уже указывалось, уравнения преобразования Лорентца определены нами только для относительных скоростей, меньших скорости света. Если бы система отсчета могла двигаться со скоростью, равной или большей, чем скорость света, было бы совершенно невозможно распространение света в направлении движения этой системы, тем более со скоростью c.

Релятивистский закон сложения скоростей. Возможно ли найти две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга со скоростью, большей c, путем последовательного применения серии преобразований Лорентца? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим суперпозицию двух

(или больше) преобразований Лорентца. Введем три системы отсчета S, S^* и S^{**}. Система S^* имеет скорость v относительно S, а S^{**} скорость w относительно S^*. Найдем уравнения преобразования, связывающие S^{**} с S. Будем исходить из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & y^* &= y, \\ t^* &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & z^* &= z, \\ x^{**} &= \frac{x^* - wt^*}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, & y^{**} &= y^*, \\ t^{**} &= \frac{t^* - \frac{w}{c^2}\cdot x^*}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, & z^{**} &= z^*. \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Подставим первую систему во вторую. Непосредственное вычисление дает:

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y^{**} &= y, \\ z^{**} &= z, \\ t^{**} &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \tag{4.37}$$

Таким образом, два последовательных преобразования Лорентца эквивалентны одному преобразованию. Однако при этом относительная скорость S^{**} и S не равна сумме v и w. Пока v/c и w/c малы в сравнении с единицей, u близко к $v + w$; но если хотя бы одна из двух скоростей приближается к c, результирующая скорость существенно от-

личается от суммы скоростей. Соотношение (4.37) может быть переписано в виде:

$$u = c\left[1 - \frac{(1 - v/c)(1 - w/c)}{1 + vw/c^2}\right]. \qquad (4.37а)$$

Отсюда видно, что u не может быть большим или равным c, если v и w меньше c. Поэтому невозможна такая суперпозиция нескольких преобразований Лоренца, в результате которой была бы достигнута скорость, большая, чем c.

Соотношение (4.37) можно интерпретировать и несколько другим образом, так как тело, имеющее скорость w относительно S^*, имеет скорость u относительно S. Тогда соотношение (4.37) может рассматриваться, как закон сложения скоростей (в направлении оси X). В этом случае его лучше писать в виде:

$$u^* = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}, \qquad (4.38)$$

где w заменено u^*. Мы видим, что тело, имеющее скорость, меньшую c в некоторой инерциальной системе, имеет скорость, меньшую c и в любой другой инерциальной системе.

Из уравнений преобразования Лоренца следует, что материальное тело не может иметь скорость, большую c, относительно какой-либо инерциальной системы отсчета. Действительно, само материальное тело может быть выбрано за тело отсчета; если это тело изолировано от других тел и не вращается вокруг своего центра масс, то связанная с ним система будет инерциальной. Тогда, если бы в некоторой системе тело обладало скоростью, большей c, то относительная скорость этой системы и системы, связанной с телом, также была бы больше c, что невозможно (см. выше).

Собственное время материального тела. Раньше мы говорили о пространственно-временном интервале между двумя событиями. Применение этого понятия к движению материального тела и к пространственно-временным точкам вдоль его пути имеет особенно большое значение в реля-

тивистской механике. Поскольку скорость материального тела меньше c, такой интервал всегда будет временно-подобным. Если движение тела не является прямолинейным и равномерным, мы все же можем определить дифференциальный элемент из дифференциального уравнения:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ = \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} dt^2. \tag{4.39}$$

τ является «собственным временем», т. е. временем, показываемым часами, твердо связанным с движущимся телом. Деля (4.39) на dt^2 и извлекая корень, получим связь между временной координатой и собственным временем:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - u^2/c^2}, \tag{4.40}$$

где u — скорость тела. Это соотношение верно и для ускоренных и для неускоренных тел.

Как $d\tau$, так и время τ, определяемое интегралом

$$\tau = \int \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt, \tag{4.40a}$$

инвариантны относительно преобразований Лорентца, в то время как dt и u неинвариантны.

Задачи

1. На стр. 62 обсуждался один из способов измерения длины движущегося стержня. Мы можем также определять длину движущегося стержня, вычисляя произведение его скорости на интервал времени между двумя последовательными прохождениями концов стержня мимо некоторой фиксированной точки. Показать, что, пользуясь таким определением, можно получить прежнее уравнение (4.29) для лорентцова сокращения.

2. Два параллельных стержня движутся друг относительно друга вдоль их общего направления. Объяснить кажущийся парадокс, заключающийся в том, что каждый

стержень может казаться длиннее в зависимости от состояния движения наблюдателя.

3. Пусть частота светового луча в системе S равна ν. Его частота ν^* в другой системе отсчета S^* зависит от угла α между направлением светового луча и направлением относительного движения S и S^*. Получить классическое и релятивистское уравнения, дающие связь между ν, ν^* и углом α.

Для этой цели свет удобно рассматривать как плоскую скалярную волну, движущуюся со скоростью c.

Ответ.

$$\nu^*_{\mathrm{cl}} = \nu(1 - \cos\alpha \cdot v/c),$$

$$\nu^*_{\mathrm{rel}} = \nu \frac{1 - \cos\alpha \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu\left(1 - \cos\alpha \cdot \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \ldots\right).$$

Эффект первого порядка, общий в обоих случаях, есть «классический» эффект Допплера; члены второго порядка дают так называемый «релятивистский» эффект Допплера. Он не зависит от угла α.

4. Лорентц создал теорию, которая являлась предшественницей современной теории относительности. Вместо того, чтобы попытаться обобщить принцип относительности на электродинамику, он предположил, что существует привилегированная система отсчета, по отношению к которой эфир покоится. Чтобы объяснить результат опыта Майкельсона-Морлея, он принял, что эфир воздействует на ход часов и длину масштабов, движущихся через него. Согласно этой гипотезе часы замедляют свой ход, а масштабы укорачиваются в направлении своего движения. С помощью этих представлений можно найти количественные соотношения, определяющие замедление часов и сокращение масштабов.

а) Предполагая справедливость уравнений преобразования Галилея, найти точное выражение для времени, которое необходимо световому лучу на прохождение прямолинейного отрезка l в обоих направлениях в установке Майкельсона-Морлея. Скорость установки относительно приви-

легированной системы считать равной v, а угол между траекторией луча и направлением v равным α.

Ответ.

$$t=\frac{2l}{c}\frac{\sqrt{1-v^2/c^2\cdot\sin^2\alpha}}{1-v^2/c^2}. \tag{4.I}$$

б) Введем теперь гипотезу Лорентца и примем, что уравнение (4.I) применяется к сокращенной длине l и измененному углу α. Время, показываемое часами наблюдателя, является теперь не абсолютным временем t, а временем движущихся часов t^*. Более того, мы измеряем длины масштабами, которые сами сокращаются, т. е. мы измеряем не действительную сокращенную длину l, а кажущуюся, несокращенную длину l^*. Время движущихся часов t^* и кажущаяся длина l^* связаны соотношением:

$$t^*=\frac{2l^*}{c}, \tag{4.II}$$

которое следует из результата опыта Майкельсона-Морлея. Обозначим множитель, характеризующий замедление хода часов через θ, и множитель, характеризующий сокращение масштабов в направлении v, через Λ. Получить соотношения, связывающие t с t^*, l с l^*, и определить Λ и θ так, чтобы уравнения (4.I) и (4.II) стали эквивалентными.

Ответ.

$$\left.\begin{aligned} t^*&=\theta t,\\ l^*&=l\sqrt{\sin^2\alpha+\Lambda^{-2}\cos^2\alpha},\\ \Lambda&=\theta=\sqrt{1-v^2/c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.III}$$

в) Чтобы получить полную систему уравнений преобразования Лорентца (4.13), введем две системы координат: одну покоящуюся, а другую движущуюся по отношению к эфиру (S и S^*). Найти кажущиеся расстояния точек на осях системы S^* от начала координат этой системы. Наконец, установить такую связь между показаниями движущихся и покоящихся часов, чтобы световой сигнал, исходящий из начала системы координат S^* в момент $t=t^*=0$ имел кажущуюся скорость c во всех направлениях.