Глава V

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*

Классическая теория преобразований подразумевает существенное различие между пространственными и временной координатами. Поскольку интервалы времени в классической физике считаются инвариантными, временная координата всегда преобразуется сама в себя.

В релятивистской теории преобразований временная координата перестает занимать это обособленное положение, так как если две системы движутся друг относительно друга, то время в одной системе координат зависит не только от временной, но и от пространственных координат другой системы.

Законы классической физики всегда формулируются таким образом, что временная координата оказывается отделенной от пространственных; это обусловлено характером тех преобразований, относительно которых эти законы ковариантны.

Возможно и релятивистскую физику построить так, чтобы временная координата сохраняла свое специфическое положение, однако при этом законы теории относительности принимают громоздкий вид, что часто затрудняет их использование.

Для теории относительности нужно подобрать подходящий формализм. Уравнения преобразования Лорентца подсказывают целесообразность равноправной трактовки всех четырех координат: x, y, z и t. Как это должно быть сделано, было показано Г. Минковским. Мы увидим, что применение введенного им формализма упростит многие проблемы и сделает многие релятивистские законы и уравнения более ясными, чем их нерелятивистские аналоги.

Классическая физика характеризуется инвариантностью длин и времени. Формально релятивистскую физику можно

характеризовать инвариантностью выражения:

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]. \tag{5.1}$$

Инвариантность этой квадратичной формы относительно разностей координат ограничивает группу всех возможных линейных преобразований координат x, y, z и t преобразованиями Лорентца, так же как инвариантность выражения

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{5.2}$$

определяет группу ортогональных преобразований в трехмерном пространстве. Четырехмерный континуум (x, y, z, t) с инвариантной формой τ_{12}^2 можно трактовать как четырехмерное „пространство", в котором τ_{12} является „расстоянием" между двумя „точками": (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Благодаря этому оказывается возможным развить обобщенный векторный анализ в „мире Минковского" и сформулировать все инвариантные соотношения в ясной и сжатой форме.

Мы начнем изучение этого математического метода с напоминания основ элементарного векторного исчисления, обращая внимание главным образом на формальную сторону. Затем мы обобщим формализм таким образом, чтобы стало возможным его применение к пространственно-временному континууму.

Ортогональные преобразования. Начнем с рассмотрения прямоугольной декартовой системы координат, причем обозначим ее три координаты через x_1, x_2 и x_3 (вместо x, y и z). Обозначим также разности координат между двумя точками P и P' через Δx_1, Δx_2 и Δx_3. Расстояние между двумя точками равно:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i^2. \tag{5.2a}$$

Произведя линейное преобразование координат

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.3}$$

получим новые разности координат

$$\Delta x'_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} \Delta x_k, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.4}$$

Эти уравнения можно решить относительно Δx_k:

$$\Delta x_k = \sum_{i=1}^{3} c'_{ki} \Delta x'_i, \quad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.2а) в новых переменных имеет вид:

$$s^2 = \sum_{i,k,l=1}^{3} c'_{ik}\, c'_{il} \Delta x'_k\, \Delta x'_l. \tag{5.6}$$

Новая система координат является прямоугольной декартовой системой только в том случае, когда соотношение (5.6) формально идентично с (5.2а), т. е. если

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ik}\, c'_{il} = \left\{ \begin{matrix} 0, & \text{если } k \neq l \\ 1, & \text{если } k = l. \end{matrix} \right\} \tag{5.7}$$

(5.7) можно записать в более сжатой форме, употребляя символ Кронекера δ_{kl}, определяемый соотношениями

$$\left. \begin{matrix} \delta_{kl} = 0, & k \neq l, \\ \delta_{kl} = 1, & k = l. \end{matrix} \right\} \tag{5.8}$$

(5.7) запишется тогда в виде

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ik}\, c'_{il} = \delta_{kl}; \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.7а}$$

(5.7а) представит собой условие, которому должно удовлетворять уравнение преобразования (5.3), чтобы новая система была также декартовой.

Легко найти условия, которым должны удовлетворять коэфициенты c_{ik}. Подставляя (5.4) в (5.5), получим:

$$\Delta x_k = \sum_{i,l=1}^{3} c'_{kl} c_{il} \Delta x_l, \qquad k = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.9}$$

и так как это справедливо для произвольного Δx_k, то

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ki} c_{li} = \delta_{kl}, \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.10}$$

Умножим теперь (5.7а) на c_{lm} и просуммируем по трем возможным значениям l. В силу (5.10) и (5.7а), получим

$$\sum_{i,l=1}^{3} c'_{ik} c'_{il} c_{lm} = c'_{mk} = \sum_{l=1}^{3} \delta_{kl} c_{lm} = c_{km}. \tag{5.11}$$

Заменяя в уравнении (5.7а) c'_{ik} через c_{ki} и т. д., получим

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li} = \delta_{kl}; \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.7б}$$

Уравнение (5.10) приобретает при этом вид

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ik} c_{il} = \delta_{kl}; \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.10а}$$

Уравнения (5.7б) или (5.10а) вместе с (5.3) определяют группу ортогональных преобразований.

Детерминант преобразования. Исследуем несколько более подробно преобразования (5.3) и (5.7б).

Детерминант из коэфициентов c_{ik}

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

равен ± 1. Для доказательства этого мы используем правило умножения детерминантов, согласно которому произведение двух детерминантов $|a_{ik}|$ и $|b_{ik}|$ равно детерми-

нанту $\left|\sum_l a_{il} b_{lk}\right|$. Далее составим детерминанты обеих сторон уравнения (5.7б):

$$\left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li}\right| = |\delta_{kl}|. \tag{5.12}$$

Согласно указанному закону умножения детерминантов, для левой части получим [см. также (5.10) и (5.11)]:

$$\left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li}\right| = \left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c'_{il}\right| = |c_{ki}| \cdot |c'_{il}| = \\ = |c_{ki}| \cdot |c_{li}| = |c_{ki}|^2. \tag{5.13}$$

Правая часть уравнения (5.12) равна единице, так как

$$|\delta_{mn}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.14}$$

Отсюда:

$$|c_{ki}| = \pm 1. \tag{5.15}$$

Значение детерминанта $+1$ соответствует „собственному" вращению, в то время как значение -1 соответствует ортогональным преобразованиям, сопровождающимся зеркальным отражением.

Сокращенные обозначения. В большинстве уравнений, встречающихся в трехмерном векторном (и тензорном) анализе, каждый буквенный индекс, появляющийся в произведении один раз, может принимать три значения: 1, 2, 3, а каждый буквенный индекс, появляющийся в произведении дважды, представляет собой индекс, по которому производится суммирование. В дальнейшем мы будем всегда опускать знак суммы и все примечания типа (i, $k = 1, 2, 3$). При этом условимся, что:

1) каждый буквенный индекс, встречающийся в произведении один раз, принимает все возможные для него значения;

2) каждый буквенный индекс, встречающийся в произведении дважды, является индексом суммирования, причем суммирование проводится по всем возможным значениям этого индекса.

Например, уравнения (5.3) и (5.6) запишутся следующим образом:

$$x'_i = c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i},$$
$$s^2 = c'_{ik} c'_{il} \Delta x'_k \Delta x'_l.$$

Часто индексы суммирования называются просто немыми индексами. Значение выражения не изменится, если пару немых индексов обозначить другой буквой, например:

$$c_{ik} x_k = c_{il} x_l.$$

Векторы. Закон преобразования Δx_k, (5.4), является общим законом преобразования векторов относительно ортогональных преобразований. Иначе: вектор определяется как совокупность трех величин, преобразующихся как координатные разности:

$$a'_k = c_{kl} a_l. \tag{5.16}$$

Если координаты вектора заданы в некоторой декартовой системе координат, их можно найти и в любой другой системе.

Норма вектора определяется как сумма квадратов его компонент.

Покажем, что норма инвариантна относительно ортогональных преобразований, т. е.

$$a'_k a'_k = a_i a_i. \tag{5.17}$$

Подставляя вместо a'_k (5.16) и используя уравнения (5.10а), получим:

$$a'_k a'_k = c_{kl}\, a_i\, c_{kl}\, a_l = \delta_{il} a_i a_l = a_i a_i,$$

что и доказывает справедливость (5.17) при ортогональных преобразованиях.

Скалярное произведение двух векторов определяется как сумма произведений их соответствующих компонент:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \equiv a_i b_i. \tag{5.18}$$

Инвариантность этого выражения относительно ортогональных преобразований доказывается аналогично тому, как это было сделано для (5.17). Норма вектора есть скалярное произведение вектора на самого себя.

Слово скаляр часто употребляется в векторном и тензорном анализе вместо слова инвариант. „Скалярное произведение" означает „инвариантное произведение".

Суммы и разности векторов также являются векторами

$$\left.\begin{aligned} a_i + b_i &= s_i, \\ a_i - b_i &= d_i. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

То, что новые величины s_i и d_i действительно преобразуются согласно (5.16), следует из линейного и однорядного характера этого закона преобразования.

Произведение вектора на скаляр (инвариант) есть вектор

$$s\cdot a_i = b_i. \tag{5.20}$$

Доказательство предоставляем читателю.

Обсуждение оставшейся алгебраической векторной операции — векторного произведения будет проведено ниже в этой главе, так как трансформационные свойства векторного произведения не совсем такие же, как у вектора.

Векторный анализ. Теперь можно перейти к простейшим дифференциальным операциям — нахождению градиента и дивергенции. Рассмотрим в трехмерном пространстве скалярное поле V, т. е. функцию трех координат x_i, инвариантную относительно преобразований координат. Вид функции V зависит от выбора системы координат, однако значение ее в каждой фиксированной точке P не меняется при преобразовании координат.

Каков будет закон преобразования производных по координатам от функции V

$$V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}? \tag{5.21}$$

Мы должны выразить производные по x'_k через производные по x_i

$$\frac{\partial V}{\partial x'_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{5.22}$$

Согласно (5.3), x'_k являются линейными функциями от x_i, и наоборот. Поэтому $\partial x_i/\partial x'_k$ постоянны и равны коэфициентам c'_{ik}, определяемым уравнениями (5.5). Отсюда

$$V_{,k'} = c'_{ik}V_{,i}$$

и согласно (5.11)

$$V_{,k'} = c_{ki}V_{,i}. \tag{5.23}$$

Три величины $V_{,i}$ преобразуются согласно уравнению (5.11); поэтому они являются компонентами вектора, который называется градиентом скалярного поля V.

Три функции координат $V_i(x_1, x_2, x_3)$ являются компонентами векторного поля, если в каждой точке пространства они преобразуются как компоненты вектора. Функции V'_i от координат x'_r определяются, таким образом, уравнениями

$$V'_i(x'_r) = c_{ik}V_k(x_s), \tag{5.11a}$$

где x_s и x'_r связаны уравнениями преобразования. Операция градиента приводит к образованию векторного поля из первоначального скалярного.

Операция дивергенции является в некотором смысле противоположной. При заданном вектором поле V_i мы образуем сумму производных каждой компоненты по координате с тем же индексом

$$\operatorname{div} V \equiv V_{i,i}. \tag{5.24}$$

Покажем, что это выражение является инвариантом (скаляром):

$$V'_{k,k'} = V_{i,i}. \tag{5.25}$$

Метод доказательства совершенно такой же, как и выше. Заменим штрихованные величины и производные нештрихованными

$$V'_{k,k'} = c'_{mk}(c_{kl}V_l)_{,m} = c_{kl}c'_{mk}V_{l,m}. \tag{5.26}$$

В силу уравнения (5.10) последнее выражение равно правой части уравнения (5.25).

Дивергенция градиента скалярного поля является лапласианом этого поля и представляет также скалярное поле:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} V \equiv V_{,ss} \equiv \nabla^2 V \tag{5.27}$$

Тензоры. Во многих разделах физики мы встречаемся с величинами, законы преобразования которых несколько сложнее, чем для векторов. В качестве примера рассмотрим так называемый „векторный градиент". Если задано векторное поле V_i, можно образовать совокупность величин, определяющих изменение каждой компоненты V_i при переходе из точки с координатами x_k в произвольном направлении в бесконечно близкую точку с координатами $x_k + \delta x_k$. Приращениями величин V_i будут

$$\delta V_i = V_{i,k}\delta x_k, \tag{5.28}$$

девять величин $V_{i,k}$ называются векторным градиентом от V_i. Законы преобразования этих величин легко получить обычным способом:

$$V'_{m,n'} = c'_{kn}(c_{mi}V_i)_{,k} = c_{mi}c_{nk}V_{i,k}. \tag{5.29}$$

Векторный градиент является примером нового класса величин, тензоров, к рассмотрению которого мы теперь перейдем. В общем случае тензор имеет N индексов, каждый из которых может принимать значения от 1 до 3. Тензор имеет

поэтому 3^N компонент. Эти 3^N компоненты преобразуются согласно следующему закону:

$$T'_{mns\ldots} = c_{mi}c_{nk}c_{sl}\ldots T_{ikl\ldots}. \tag{5.30}$$

Число индексов N называется рангом тензора. Векторный градиент является тензором второго ранга, вектор — тензором первого ранга, а скаляр может быть назван тензором нулевого ранга.

Важным тензором является символ Кронекера. Его компоненты во всех координатных системах, согласно (5.30) и (5.7б), одни и те же:

$$\delta'_{kl} = c_{ki}c_{lj}\delta_{ij} = c_{ki}c_{li} = \delta_{kl}. \tag{5.31}$$

Сумма или разность двух тензоров одинакового ранга является тензором того же ранга. Запишем этот закон для тензоров третьего ранга:

$$T_{ikl} + U_{ikl} = V_{ikl}, \tag{5.32}$$

$$T_{ikl} - U_{ikl} = W_{ikl}. \tag{5.33}$$

Доказательство такое же, как для соответствующего векторного закона (5.19).

Произведение двух тензоров рангов M и N является новым тензором ранга $(M+N)$:

$$T_{ik\ldots}U_{lm\ldots} = V_{ik\ldots lm\ldots}. \tag{5.34}$$

Ранг тензора может быть понижен на 2 (или на любое четное число) посредством операции, называемой „свертыванием". Любые два индекса могут быть превращены в пару немых индексов. Например, свертыванием тензора $T_{ikl\ldots}$ можно получить тензоры $T_{ssl\ldots}$, $T_{irr\ldots}$ и т. д. Очень просто доказать, что в результате свертывания получается тензор. Для первого из приведенных примеров оно проводится так:

$$T'_{ssl\ldots} = c_{si}c_{sk}c_{lm}\ldots T_{ikm\ldots}.$$

В силу (5.10а) правая часть равна

$$T'_{ssl\ldots} = \delta_{ik}c_{lm\ldots}T_{ikm\ldots} = c_{lm\ldots}T_{iim\ldots}. \tag{5.35}$$

При свертывании векторного градиента (тензор второго ранга) мы получаем дивергенцию (тензор нулевого ранга). Операции умножения (5.34) и свертывания могут быть скомбинированы так, что в результате получаются тензоры такие, как

$$T_{ik}U_{ik},\ T_{ik}U_{km},\ T_{ik}U_{ik},\ T_{ik}U_{kl}.$$

Тензоры могут обладать свойствами симметрии по отношению к своим индексам. Если тензор не меняется при перестановке двух или более индексов, он называется симметричным относительно этих индексов. Например:

$$t_{ikl}=t_{kil},$$
$$t_{iklm}=t_{ilkm}=t_{kilm}=t_{ikim}=t_{klim}=t_{ilkm}.$$

Первый тензор симметричен относительно первых двух индексов, второй тензор симметричен относительно первых трех индексов.

Если компоненты тензора остаются неизменными при четной перестановке индексов и меняют знак при нечетной перестановке, тензор называется антисимметричным (иногда кососимметричным) относительно этих индексов. Например,

$$t_{ikl}=-t_{kil},$$
$$t_{iklm}=t_{klim}=t_{ilkm}=-t_{ilkm}=-t_{kilm}=-t_{kiim}.$$

Все эти свойства симметрии тензоров являются инвариантными. Доказательство этого элементарно и предоставляется читателю.

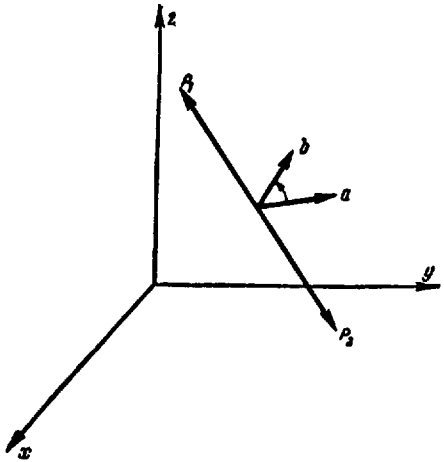
Тензор Кронекера симметричен относительно своих двух индексов.

Тензорный анализ. При дифференцировании тензора по координатам получается тензор, ранг которого выше на единицу. Доказательство опять очень просто:

$$T'_{mn\ldots,s'}=c'_{ls}(c_{mi}c_{nk}\ldots T_{ik\ldots}),_{l}=c_{mi}c_{nk}\ldots c_{sl}T_{ik\ldots},_{l}. \quad (5.36)$$

Если тензор получается в результате свертывания по индексу дифференцирования и какому-либо другому индексу, например $T_{ik\ldots k}$, его часто называют дивергенцией.

Тензорные плотности. Векторное произведение двух векторов **a** и **b** обычно определяется как вектор, перпендикулярный к **a** и **b**, а по абсолютной величине равный $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Всегда существуют два вектора, удовлетворяющих этим условиям, как, например, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ на фиг. 6. Выбор одного из них производится обычно



Фиг. 6. Векторное произведение. В правой системе координат P_1 представляет векторное произведение **a** и **b**.

наложением условия, что векторы **a**, **b** и **P** должны образовывать „винт" того же направления, что и оси координат, взятые в последовательности x, y, z. На фиг. 6 этому условию удовлетворяет вектор $\mathbf{P}_1$ в силу того, что мы выбрали „правую" систему координат. Если произвести зеркальное отражение (например изменить направление оси X на фиг. 6 на обратное), то $\mathbf{P}_2$ автоматически станет векторным произведением **a** и **b**.

Таким образом, векторное произведение не является обычным вектором, так как оно меняет знак при переходе от правой системы координат к левой, и наоборот. Такие величины называются „аксиальными векторами",

в то время как обычные векторы называются „полярными векторами“.

В декартовой системе координат компоненты **P** имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ P_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ P_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Аналогично ротор векторного поля V_i определяется, как „аксиальный вектор“ с компонентами

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= V_{3,2} - V_{2,3}, \\ C_2 &= V_{1,3} - V_{3,1}, \\ C_3 &= V_{2,1} - V_{1,2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

С точки зрения тензорного анализа можно избежать понятия „аксиального вектора“, представляя векторное произведение и ротор как антисимметричные тензоры второго ранга

$$P_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \tag{5.37a}$$

и

$$C_{ik} = V_{k,i} - V_{i,k}. \tag{5.38a}$$

Можно показать, что все уравнения, в которые входят „аксиальные векторы“, могут быть записаны ковариантным образом с помощью таких антисимметричных тензоров. Однако такая трактовка недостаточно ясно показывает связь между законами преобразования антисимметричного тензора второго ранга и „аксиального вектора“. В то же время, вводя наряду с понятием тензора новое понятие „тензорной плотности“ [1]), мы попрежнему можем пользоваться методами обычного векторного анализа.

Тензорные плотности преобразуются так же, как обычные тензоры, с той лишь разницей, что они умножаются еще на детерминант преобразования (5.15). Пока этот детерминант равен $+1$, т. е. пока мы имеем „собственно

---

[1]) В русской литературе вместо термина „тензорная плотность“ в случае ортогональных преобразований часто пользуются термином „псевдотензор“. (*Прим. ред.*)

ортогональное преобразование" без отражений, не существует разницы между тензорами и тензорными плотностями. Однако при зеркальном отражении происходит изменение знака тензорных плотностей по сравнению со знаком тензоров. Таким образом, тензорные плотности находятся в таком же отношении к обычным тензорам, как „аксиальные векторы" к „полярным векторам". Их закон преобразования может быть записан в виде:

$$\mathfrak{T}'_{mn\ldots} = c_{mi} c_{nk} \cdots |c_{ab}| \mathfrak{T}_{ik\ldots}. \tag{5.39}$$

Для них законы алгебры и анализа таковы: сумма или разность тензорных плотностей одинакового ранга является тензорной плотностью того же ранга. Произведение тензора на тензорную плотность является тензорной плотностью. Произведение двух тензорных плотностей дает тензор. Свертывание тензорной плотности приводит к новой тензорной плотности низшего ранга. Производные компонент тензорной плотности являются компонентами новой тензорной плотности, ранг которой на 1 выше ранга первоначальной тензорной плотности.

Тензорная плотность Леви-Чивита. Мы уже видели, что символ Кронекера представляет собой тензор, компоненты которого имеют одно и то же постоянное значение в любой системе координат. Точно так же существует постоянная тензорная плотность третьего ранга, тензорная плотность Леви-Чивита, определяемая следующим образом. Тензорная плотность δ_{ikl} антисимметрична относительно всех трех индексов; поэтому все ее компоненты, имеющие по крайней мере два одинаковых индекса, равны нулю. Ее неисчезающие компоненты равны ± 1, в зависимости от того, является ли (i, k, l) четной или нечетной перестановкой тройки чисел $(1, 2, 3)$.

Мы должны еще показать, что компоненты δ_{ikl} действительно являются компонентами тензорной плотности. Для этого рассмотрим тензорную плотность D_{ikl}, компо-

ненты которой в одной из систем координат будут равны δ_{ikl}. Если окажется, что и в другой системе координат ее компонентами опять будут δ_{ikl}, наше утверждение будет доказано.

Найдем компоненты D_{ikl} в новой системе координат:

$$D'_{mns} = |c_{ab}|\, c_{mi} c_{nk} c_{sl} \delta_{ikl}. \tag{5.40}$$

Поскольку при преобразовании координат антисимметрия сохраняется, все компоненты D'_{mns}, по крайней мере с двумя одинаковыми индексами, исчезают. Поэтому выпишем только те компоненты, у которых все три индекса различны. Компонента D'_{123} равна:

$$D'_{123} = |c_{ab}|\, c_{1i} c_{2k} c_{3l} \delta_{ikl}. \tag{5.41}$$

Правая часть представляет собой просто квадрат $|c_{ab}|$ и равна единице, так как по определению δ_{ikl} выражение $c_{1i} c_{2k} c_{3l} \delta_{ikl}$ является детерминантом $|c_{ab}|$.

Зная, что D'_{123} равно единице, остальные компоненты легко получить из свойств симметрии:

$$D'_{123} = D'_{231} = D'_{312} = -D'_{132} = -D'_{213} = -D'_{321}. \tag{5.42}$$

Таким образом, D'_{mns} равны δ_{mns}, что и требовалось доказать.

Векторное произведение и ротор. С помощью тензорной плотности Леви-Чивита можно антисимметричный тензор второго ранга поставить в соответствие с векторной плотностью, так что

$$\mathfrak{m}_l = \frac{1}{2} \delta_{ikl} w_{kl}. \tag{5.43}$$

Отсюда

$$w_{kl} = \delta_{kli} \mathfrak{m}_i. \tag{5.44}$$

Применяя уравнение (5.43) к векторному произведению и ротору, определенными соответственно соотношениями (5.37) и (5.38), получим:

$$\mathfrak{P}_i = \delta_{ikl} a_k b_l, \tag{5.37б}$$

$$\mathfrak{C}_i = \delta_{ikl} a_{l,k}. \tag{5.38б}$$

Эти две векторные плотности $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{C}_i$ преобразуются аналогично обычным векторам, за исключением изменения знака при зеркальном отражении. Такие векторы в векторном исчислении называют „аксиальными“ векторами с целью подчеркнуть, что они в некотором смысле связаны с „вращением“.

Эти „аксиальные“ векторы действительно связаны с вращением. Например, момент количества движения является векторным произведением радиуса-вектора на количество движения (импульс):

$$\mathfrak{T}_i = \delta_{ikl} x_k p_l. \tag{5.45}$$

Не считая изменения знака при отражении, этот вектор преобразуется как обычный вектор. Предположим, что из всех x_k только x_1 отлично от нуля и что $\mathbf{p}$ имеет только компоненту p_2. Тогда момент количества движения имеет только одну компоненту $\mathfrak{T}_3$. Зеркальное отражение можно произвести тремя различными способами: каждую координату x_i можно заменить на $(-x_i)$, оставляя при этом остальные две координаты неизменными. $\mathfrak{T}_3$ остается неизменным при изменении знака x_3 и меняет знак в двух других случаях. Обычный вектор изменил бы знак только при замене x_3 на $(-x_3)$.

Обобщение. Мы рассмотрели поведение векторов и тензоров в трехмерном пространстве по отношению к ортогональным преобразованиям. Теперь можно обобщить полученные результаты так, чтобы они могли быть использованы в дальнейшем при рассмотрении интересующих нас вопросов. Это обобщение проведем в два этапа. Во-первых, разовьем наш формализм так, чтобы он был применим к пространству произвольного (целого, положительного) числа измерений; во-вторых, рассмотрим преобразования более общего типа, чем ортогональные.

***n*-мерное пространство.** Первое обобщение совершенно тривиально. Вместо трех координат x_1, x_2, x_3 введем n координат $x_1, \ldots, x_n$, описывающих n-мерное многооб-

разие. Предположим опять, что существует инвариантное расстояние между двумя точками

$$s^2 = \Delta x_i \Delta x_i, \tag{5.2б}$$

здесь предполагается суммирование по всем n значениям индекса i. Уравнение (5.2б) инвариантно относительно группы n-мерных ортогональных преобразований

$$x'_i = c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i}, \tag{5.3а}$$

где c_{ik} удовлетворяют условиям

$$c_{ik} c_{il} = \delta_{kl}. \tag{5.10б}$$

Все индексы принимают значения от 1 до n, суммирование также производится от 1 до n. Детерминант $|c_{ab}|$ опять равен ± 1.

Векторы определяются законами преобразования

$$a'_k = c_{ki} a_i, \tag{5.16а}$$

их алгебра и анализ таковы же, как векторные алгебра и анализ в трехмерном пространстве.

Тензоры и тензорные плотности определяются так же, как в трехмерном пространстве, только теперь все индексы пробегают значения от 1 до n. δ_{ik} попрежнему является симметричным тензором.

Тензорная плотность Леви-Чивита определяется следующим образом. $\delta_{ik\ldots s}$ есть тензорная плотность ранга n, антисимметричная по отношению ко всем своим n индексам. Неисчезающие ее компоненты равны ± 1, их знак зависит от четности или нечетности перестановки $(i, k, \ldots, s)$ относительно $(1, 2, \ldots, n)$. „Векторное произведение“ не является более векторной плотностью. С помощью тензорной плотности Леви-Чивита из антисимметричного тензора ранга m $(m \leqslant n)$ можно образовать антисимметричную тензорную плотность ранга $(n - m)$. Только при $n = 3$ тензорная плотность, соответствующая тензору второго ранга („дуальная“ ему), является векторной плотностью.

Обобщенные преобразования. „Длина“ в пространстве Минковского, определяемая по (5.1), имеет вид, отличный от (5.2б). Поэтому в дальнейшем мы не будем ограничиваться преобразованиями, оставляющими инвариантным (5.2б), а рассмотрим более общие преобразования координат. Сперва может показаться, что мы уклоняемся от нашей основной цели, рассматривая преобразования гораздо более общего типа, чем преобразования Лорентца. Однако эти преобразования нам понадобятся в общей теории относительности; помимо этого, поскольку они во многих отношениях так же просты, как и менее общая группа преобразований Лорентца, мы в дальнейшем будем избавлены от ненужных повторений.

Рассмотрим пространство, в котором введена декартова система координат, так что длина определяется согласно (5.2б). Перейдем далее от декартовой системы координат к другой, недекартовой системе. Новые координаты обозначим через $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ (индексы наверху, конечно, не надо путать с показателями степени). Мы имеем тогда:

$$\xi^i = f^i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.46}$$

где n функций f^i произвольны; предполагается только, что они нужное число раз дифференцируемы, что якобиан преобразования

$$\det \left| \frac{\partial \xi^s}{\partial x_r} \right|$$

нигде не обращается в нуль, и что ξ^i действительны для всех действительных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

s^2 — квадратичная форма относительно Δx_i, вообще говоря, не является квадратичной формой относительно $\Delta \xi^i$. Однако квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками продолжает оставаться квадратичной формой по отношению к дифференциалам координат. В декартовых координатах бесконечно малое расстояние определяется соотношением

$$ds^2 = dx_k dx_k. \tag{5.47}$$

Дифференциалы dx_k выражаются через $d\xi^l$ следующим образом:

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} d\xi^l. \tag{5.48}$$

Подставляя это в (5.47), получим:

$$ds^2 = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} d\xi^l d\xi^l. \tag{5.49}$$

Отсюда видно, что ds^2 является квадратичной формой $d\xi^l$, независимо от выбора системы координат. Это подтверждает, таким образом, что при общих преобразованиях координат роль разностей координат Δx_i и расстояния s, которыми удобно пользоваться в декартовой системе координат при ортогональных преобразованиях, играют дифференциалы координат $d\xi^l$ и дифференциал расстояния ds.

Векторы. Рассмотрим, как преобразуются дифференциалы при общем преобразовании координат. Пусть ξ^l и ξ'^l представляют собой два ряда недекартовых координат. Их дифференциалы связаны тогда уравнениями

$$d\xi'^l = \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^l} d\xi^l. \tag{5.50}$$

Дифференциалы преобразованных координат $d\xi'^l$ являются линейными однородными функциями от $d\xi^l$; однако коэфициенты преобразования $(\partial \xi'^l / \partial \xi^l)$ не постоянны, а являются функциями от ξ^l. Их детерминант $|\partial \xi'^a / \partial \xi^b|$ также не постоянен. Этими величинами мы воспользуемся для введения геометрического понятия „контравариантного вектора". Контравариантный вектор имеет n компонент, преобразующихся так же, как дифференциалы координат:

$$a'^l = \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^l} a^l. \tag{5.51}$$

Сумма и разность контравариантных векторов, а также произведение контравариантного вектора на скаляр представляют собой контравариантные векторы.

Невозможно образовать скалярное произведение только из контравариантных векторов. Чтобы найти в нашем формализме величину, соответствующую скалярному произведению, рассмотрим скалярное поле $V(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Изменение V при бесконечно малом смещении $\delta\xi^i$ равно:

$$\delta V = V_{,i}\delta\xi^i, \qquad V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial \xi^i}. \tag{5.52}$$

Левая часть первого соотношения, очевидно, инвариантна. Правая часть имеет вид скалярного произведения; один из множителей является контравариантным вектором $\delta\xi^i$, второй представляет собой градиент V, т. е. $V_{,i}$.

Компоненты градиента V преобразуются по закону

$$V_{,i'} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} V_{,i}. \tag{5.53}$$

$V_{,i'}$ является линейной однородной функцией от $V_{,i}$. Закон преобразования (5.53) отличается от закона преобразования контравариантного вектора. Мы назовем градиент скалярного поля **ковариантным вектором**. В общем случае ковариантный вектор определяют как **совокупность n величин, преобразующихся согласно закону**

$$a'_i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} a_i. \tag{5.54}$$

Сумма и разность ковариантных векторов и произведение ковариантного вектора на скаляр также представляют собой ковариантные векторы.

Для того чтобы различать контравариантные и ковариантные векторы, мы будем первые обозначать индексом сверху, а вторые — индексом снизу.

Коэфициенты преобразования контра- и ковариантных векторов различны, но связаны между собой. Коэфициенты $(\partial\xi'^i/\partial\xi^i)$ уравнения (5.51) и коэфициенты $(\partial\xi^i/\partial\xi'^i)$ уравнения (5.54) связаны друг с другом системой из n^2 соотношений

$$\frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^l} \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^i} = \delta^k_l, \tag{5.55}$$

где δ_i^k опять означает символ Кронекера, обозначавшийся ранее через δ_{ik}. В силу (5.55) внутреннее (скалярное) произведение ко- и контравариантного векторов является инвариантом:

$$a'_i b'^i = a_i b^i. \tag{5.56}$$

Рассмотрим случай ортогональных преобразований. Их коэфициенты преобразований c_{ik} удовлетворяют (5.7б) и (5.10а). Производные, определяющие в общем случае переход от одних координат к другим, при ортогональном преобразовании равны

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = c_{ii},$$

и так как (5.55) справедливо для любых преобразований, из (5.7б) следует, что также

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_i} = c_{ii}. \tag{5.57}$$

Поэтому, если ограничиться ортогональными преобразованиями, различие между контра- и ковариантными векторами исчезает.

Тензоры. Тензоры определяются как совокупность n^N величин (компонент) (N — ранг тензора), которые преобразуются относительно каждого своего индекса, как вектор. Они могут быть ковариантными во всех индексах, контравариантными во всех индексах или смешанными, т. е. в некоторых индексах ковариантными, а в остальных контравариантными. Те индексы, относительно которых тензор контравариантен, ставятся наверху, а те, относительно которых он ковариантен, ставятся внизу. Для иллюстрации этого определения приведем пример смешанного тензора третьего ранга:

$$t'_{mn}{}^{s} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^m} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^n} \cdot \frac{\partial \xi'^s}{\partial \xi^l} \cdot t_{ik}{}^{l}. \tag{5.58}$$

Свойства симметрии тензоров инвариантны относительно преобразований координат, если речь идет об индексах одного типа (ковариантных или контравариантных).

Символ Кронекера является смешанным тензором:

$$\delta'^{l}_{k}=\frac{\partial\xi'^{l}}{\partial\xi^{m}}\cdot\frac{\partial\xi^{n}}{\partial\xi'^{k}}\delta^{m}_{n}=\frac{\partial\xi'^{l}}{\partial\xi^{m}}\frac{\partial\xi^{m}}{\partial\xi'^{k}}=\delta^{l}_{k}. \tag{5.59}$$

Произведение двух тензоров рангов M и N дает тензор ранга $(M+N)$, причем каждый индекс каждого множителя продолжает оставаться ковариантным или контравариантным. Подобно тому как скалярное произведение ко- и контравариантного векторов приводит к скаляру, любые два индекса разного положения (т. е. верхний и нижний) можно использовать для суммирования, и в результате получить тензор на два ранга ниже. Примеры подобных произведений таковы:

$$a_{ik.}{}^{l}\,b^{mn}_{\cdot\cdot s},\quad a_{ik.}{}^{l}\,b^{kn}_{\cdot\cdot s},\quad a_{ik.}{}^{l}\,b^{kn}_{\cdot\cdot l}.$$

Если соответствующие компоненты двух тензоров одинакового ранга складываются или вычитаются, их сумма или разность являются компонентами нового тензора в случае, если оба исходных тензора имеют одинаковое число индексов каждого типа.

Таковы простейшие правила тензорной алгебры. Они показывают, как образуются новые величины, преобразующиеся по законам типа (5.58).

Метрический тензор, римановы пространства. Выражение, входящее в (5.49), $g_{ll}=\frac{\partial x_k}{\partial\xi^{l}}\frac{\partial x_k}{\partial\xi^{l}}$ при переходе от одной системы ξ^{l} к другой ξ'^{m} преобразуется как тензор

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_k}{\partial\xi'^{m}}\frac{\partial x_k}{\partial\xi'^{n}}&=\frac{\partial x_k}{\partial\xi^{l}}\frac{\partial\xi^{l}}{\partial\xi'^{m}}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\xi^{l}}\frac{\partial\xi^{l}}{\partial\xi'^{n}};\\ g'_{mn}&=\frac{\partial\xi^{l}}{\partial\xi'^{m}}\frac{\partial\xi^{l}}{\partial\xi'^{n}}\,g_{ll}.\end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

Другими словами, g_{il} является ковариантным симметричным тензором второго ранга. Он называется метрическим тензором.

Существуют „пространства", в которых невозможно ввести декартову систему координат. Одним из двумерных „пространств" такого типа является поверхность сферы. Если в качестве координат ввести широту и долготу φ и θ, то расстояние между двумя бесконечно близкими точками на поверхности сферы выразится следующим образом через дифференциалы координат:

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\theta^2).$$

Чтобы включить подобные непрерывные многообразия в круг разбираемых вопросов, рассмотрим пространства с некоторым метрическим тензором, не останавливаясь на вопросе о возможности введения в них декартовой системы координат. Образование, в котором задан „квадрат дифференциала длины", т. е. инвариантная однородная квадратичная функция дифференциалов координат, называется „метрическим пространством" или „римановым пространством". Если возможно в римановом пространстве ввести такую систему координат, в которой метрический тензор в каждой точке будет равен δ_{ik}, эта система координат будет декартовой, а пространство называется эвклидовым.

Если бесконечно малое расстояние определяется соотношением

$$ds^2 = g_{il} d\xi^i d\xi^l, \tag{5.61}$$

причем ds^2 инвариант, то g_{il} является ковариантным тензором. Наше предыдущее доказательство основывалось на предположении, что g_{il} равно выражению $\frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l}$; другими словами, мы предполагали возможность введения декартовой системы координат. Для того чтобы показать, что трансформационные свойства g_{il} не зависят от этого предположения, рассмотрим следующее уравнение:

$$g_{il} d\xi^i d\xi^l = g'_{mn} d\xi'^m d\xi'^n, \tag{5.62}$$

выражающее инвариантность ds^2. Заменяя $d\xi^l$ слева через $(\partial\xi^l/\partial\xi'^m)\cdot d\xi'^m$, получим:

$$g_{ll}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^m}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^n}d\xi'^m d\xi'^n = g'_{mn}d\xi'^m d\xi'^n. \tag{5.63}$$

В силу произвольности $d\xi'^m$ можно приравнять коэфициенты с обеих сторон равенства, таким образом показывается справедливость соотношений (5.60).

Если детерминант компонент g_{ll} не равен нулю, можно ввести совокупность новых величин g^{il} согласно соотношениям

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l. \tag{5.64}$$

Чтобы получить их трансформационные свойства, преобразуем сначала g_{ik}. Заменим их выражением

$$g_{ik} = \frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}g'_{mn}, \tag{5.65}$$

тогда получим:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^l}g'_{mn}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}g^{kl} = \delta_i^l;$$

далее умножаем последнее соотношение на $\frac{\partial\xi^i}{\partial\xi'^r}\cdot\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}$. В силу (5.59) правая часть обращается в δ_r^s; для левой части получим:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^r}g'_{mn}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}g^{kl}\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l} = \delta_r^m g'_{mn}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}g^{kl} =$$

$$= g'_{rn}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}g^{kl},$$

так что

$$g'_{rn}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}g^{kl} = \delta_r^s. \tag{5.66}$$

Сравнение (5.66) с (5.64) дает

$$\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}g^{kl} = g'^{ns}, \tag{5.67}$$

т. е. g^{kl} являются компонентами контравариантного тензора. Тензор этот симметричен. Это можно показать, умножая (5.64) на $g_{ls}g^{ir}$. Тогда левая часть будет равна

$$g_{ik}g^{kl}g_{ls}g^{ir}=g_{kl}g^{ir}g^{kl}g_{sl}=\delta^r_k g^{kl}g_{sl}=g_{sl}g^{rl},$$

в то время как правая часть обращается в

$$\delta^l_i g_{ls}g^{ir}=g_{is}g^{ir}=g_{si}g^{ir}=\delta^r_s,$$

т. е. мы видим, что

$$g_{sl}g^{rl}=\delta^r_s,$$

и, сравнивая это соотношение с (5.64), находим

$$g^{kl}=g^{lk}. \tag{5.68}$$

Тензор g^{kl} называется контравариантным метрическим тензором. Значения его компонент, как ясно из (5.64), равны минорам от g_{kl}, деленным на детерминант $g=|g_{ab}|$:

$$g^{kl}=g^{-1}\cdot\mathrm{minor}\ (g_{kl}). \tag{5.69}$$

В декартовой системе координат g^{kl} равно δ_{kl}.

Поднятие и опускание индексов. Ковариантный вектор может быть получен из контравариантного умножением на метрический тензор и суммированием по паре индексов:

$$a_i=g_{ik}a^k. \tag{5.70}$$

Обратный процесс производится умножением a_i на контравариантный метрический тензор:

$$a^k=g^{ik}a_i. \tag{5.71}$$

Из определения контравариантного метрического тензора (5.64) следует, что уравнение (5.71) эквивалентно уравнению (5.70), другими словами, уравнение (5.71) приводит к тому же контравариантному тензору, который фигурирует в (5.70). Два вектора a_i и a^k могут поэтому рассматриваться, как два равноправных описания одного и того же геометрического понятия. Операции (5.70) и (5.71) называются поднятием и опусканием индексов. Таким же образом поднимаются и опускаются индексы у тензоров

Норма вектора определяется скаляром

$$a^2 = g_{ik} a^i a^k = g^{ik} a_i a_k = a^i a_i, \tag{5.72}$$

скалярное произведение двух векторов может быть записано в любой из следующих форм:

$$a_i b^i = a^i b_i = g_{ik} a^i b^k = g^{ik} a_i b_k. \tag{5.73}$$

Тензорные плотности. Тензорная плотность Леви-Чивита. Тензорной плотностью называется совокупность величин, преобразующихся по закону:

$$\mathfrak{T}'^{m\ldots}_{\ldots n\ldots} = \frac{\partial \xi'^m}{\partial \xi^i} \cdots \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^n} \cdots \left| \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi'^b} \right|^W \mathfrak{T}^{i\ldots}_{\ldots k\ldots}, \tag{5.74}$$

где W—постоянная, величина является характеристикой данной тензорной плотности; эта постоянная называется весом тензорной плотности. Тензоры—это тензорные плотности веса нуль. В зависимости от числа индексов говорят также о скалярной и векторной плотностях.

Сумма двух тензорных плотностей с одинаковым числом индексов каждого типа и одинакового веса является тензорной плотностью с теми же характеристиками. При умножении их веса складываются.

Символы Леви-Чивита $\delta_{a_1 \ldots a_n}$ и $\delta^{a_1 \ldots a_n}$ представляют собой соответственно тензорные плотности с весом (-1) и $(+1)$, (n — число измерений). Доказательство этого утверждения просто и аналогично тому, которое было дано при рассмотрении ортогональных преобразований.

Детерминант ковариантного метрического тензора

$$g = |g_{ik}| \tag{5.75}$$

является скалярной плотностью с весом 2.

Заметим, что с тензорными плотностями нам почти не придется иметь дела.

Тензорный анализ[1]). Рассмотрением тензорных плотностей мы полностью завершили изложение тензорной алгебры; точнее, мы описали последнюю настолько полно, насколько это нам потребуется. Теперь мы перейдем к тензорному анализу. Мы уже видели, что обыкновенные производные скалярного поля представляют собой компоненты ковариантного векторного поля. Однако в общем случае производные тензорного поля не образуют нового тензорного поля.

Рассмотрим производную вектора. Производная связывает значение вектора в одной точке с его значением в другой бесконечно близкой к ней точке. При преобразовании координат векторы в обеих точках имеют различные коэфициенты преобразования, так как последние являются функциями координат. Поэтому производные коэфициентов преобразования входят в закон преобразования производных вектора.

Однако существует способ получения новых тензоров в результате дифференцирования. Этот способ основан на аналогии с дифференцированием в декартовых координатах. Там мы получали производные вектора или тензора следующим образом: сначала вектор переносился в „соседнюю" точку без изменения величины своих компонент, т. е. параллельно самому себе. (Пока мы пользуемся декартовой системой координат, это понятие имеет инвариантный смысл, так как коэфициенты преобразования одинаковы в обеих точках.) Затем этот параллельно перенесенный вектор сравнивается с вектором (как функцией координат) в этой же точке. Их разность представляется как $A_{i,s}\,\delta x_s$. Если бы было возможно в соседней точке ввести понятия „тот же вектор" или „параллельный вектор", разность между параллельно перенесенным вектором

---

[1]) Тензорный анализ в обобщенных координатах понадобится нам в дальнейшем для понимания общей теории относительности. Для изучения специальной теории относительности его знание не является необходимым. Поэтому читатели, не интересующиеся общей теорией относительности, могут пропустить этот и следующий разделы.

и вектором поля в этой точке преобразовывалась бы как вектор в этой же точке.

Определение параллельного переноса действительно можно ввести сравнительно простым образом. При этом величина смещенного вектора зависит как от исходного вектора, так и от направления переноса. Рассмотрим сперва эвклидово пространство, в котором можно ввести декартову систему координат. В этой системе закон параллельного переноса имеет вид

$$a_{i,\,k}\delta x_k = 0, \tag{5.76}$$

где δx_k представляет собой бесконечно малое смещение. Введем теперь произвольное преобразование координат (5.46). Компоненты вектора в новой системе координат отметим штрихами. Мы имеем:

$$a_i = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} a'_r,$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi^s}\left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x_i} a'_r\right) = \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s} + \\ + \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s}\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_i\,\partial x_l} a'_r.$$

Так как δx_k преобразуется согласно (5.48), получим

$$0 = a_{i,k}\delta x_k = \left\{\frac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s} + \frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_i\,\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s} a'_r\right\}\delta \xi^s. \tag{5.76a}$$

Величины $\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s}\delta \xi^s$ являются приращениями a'_r в результате смещения и могут быть обозначены чарез $\delta a'_r$. Умножая правую часть уравнения (5.76а) на $\frac{\partial x_l}{\partial \xi^t}$, получим окончательно $\left(\text{так как } \frac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_t} = \delta^r_t\right)$:

$$\delta a'_t = -\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^t}\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_i\,\partial x_l} a'_r \delta \xi^s. \tag{5.77}$$

Если нельзя ввести декартову систему координат, мы, сохраняя линейную форму последнего уравнения, предположим, что при параллельном переносе бесконечно малые изменения компонент вектора являются билинейной функцией компонент вектора и компонент бесконечно малого смещения:

$$\delta a^i = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl} a^k \delta\xi^l, \tag{5.78}$$

$$\delta a_i = +\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl} a_i \delta\xi^l. \tag{5.79}$$

Коэфициенты $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ этих новых предполагаемых законов остаются пока совершенно неопределенными. Однако можно найти их законы преобразования. δa^i является разностью векторов в двух точках с координатами ξ^l и $\xi^l + \delta\xi^l$. При преобразовании координат новые $\delta a'^k$ получаются следующим образом:

$$\delta a'^k = \left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)_{\xi^l+\delta\xi^l} - \left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)_{\xi^l} = \frac{\partial}{\partial\xi^l}\left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)\delta\xi^l =$$
$$= \frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s{}_{,l}\delta\xi^l = \frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s}\delta a^s. \tag{5.80}$$

Уже указывалось, что δa^s не преобразуется как вектор, что явилось источником наших затруднений.

Подставим (5.80) в левую часть уравнения

$$\delta a'^k = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn} a'^m \delta\xi'^n$$

и заменим a'^m и $\delta\xi'^n$ их выражениями из (5.51) и (5.50). Тогда получим:

$$\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s}\delta a^s = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s} a^s \frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^l}\delta\xi^l.$$

Подставляя далее δa^s из (5.78), найдем

$$\left(\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} - \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}\right) a^s\delta\xi^l = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l.$$

Так как и a^s и $\delta\xi^l$ произвольны, коэфициенты при них должны быть равны:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s}\frac{\partial\xi^n}{\partial\xi^l}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}=\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}-\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}.$$

Закон преобразования для $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}$ получается после умножения на $\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}$:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{ab}=\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}-\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}\right). \qquad (5.81)$$

Последний член справа может быть записан в несколько иной форме:

$$-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}=-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial}{\partial\xi^s}\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\right)+$$

$$+\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\frac{\partial}{\partial\xi^s}\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\right)=-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial}{\partial\xi^s}(\delta^k_b)+\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\frac{\partial^2\xi^l}{\partial\xi'^a\,\partial\xi'^b}.$$

Первый член справа равен нулю, так как выражение в круглых скобках постоянно. (5.81), таким образом, дает:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{ab}=\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\left(\frac{\partial\xi^r}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^b}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{rs}+\frac{\partial^2\xi^l}{\partial\xi'^a\,\partial\xi'^b}\right). \qquad (5.82)$$

Аналогичными рассуждениями из (5.79) получим закон преобразования для $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$. Он таков же, как и для $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$.

Теперь можно наложить на $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ условия, совместимые с их законами преобразования. Эти формулы преобразования содержат два члена. Один из них зависит от Γ^k_{ab} в старой системе координат и имеет тот же вид, что и закон преобразования тензоров. Второй член не зависит от Γ^k_{ab} и симметричен в своих нижних индексах. Поэтому, если Γ^k_{ab} и равны нулю в одной системе координат, они все же будут отличны от нуля в другой системе. Однако симметрия Γ^k_{ab} по отношению к нижним индексам

сохраняется во всех системах координат, если она существует хотя бы в одной из них. Это, в частности, справедливо, когда Γ^k_{ab} исчезает в одной из систем. Далее, если $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ равны в одной системе, они остаются равными при произвольном преобразовании координат. Мы увидим, что геометрические соображения приводят нас только к таким системам Γ^k_{ab}, которые обладают обоими упомянутыми свойствами.

Произведем параллельный перенос двух векторов a_i и b^i на бесконечно малое расстояние $\delta\xi^i$. Изменение их скалярного произведения $a_i b^i$ будет равно

$$\delta(a_i b^i) = a_i \delta b^i + b^i \delta a_i = a_i b^k \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl} - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl} \right) \delta\xi^l. \quad (5.83)$$

При параллельном переносе двух векторов их скалярное произведение остается постоянным тогда и только тогда, когда $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ соответственно равны $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl}$.

Фактически предположение о равенстве $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ основывается не только на том обстоятельстве, что в декартовых координатах скалярное произведение двух постоянных векторов постоянно, но и на более общих соображениях, не связанных с декартовыми системами координат.

Обобщая закон или определение „параллельного“ переноса (5.78), (5.79) на тензоры, будем производить „параллельное“ смещение согласно следующему правилу:

$$\delta t_{ik.}{}^{l} = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^r_{is} t_{rk.}{}^{l} + \overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^r_{ks} t_{ir.}{}^{l} - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{rs} t_{ik.}{}^{r} \right) \delta\xi^s. \quad (5.84)$$

Это правило основывается на том предположении, что „параллельный перенос“ произведения производится по тому же закону, и что дифференцирование произведения:

$$\delta(abc) = ab\ \delta c + ac\ \delta b + bc\ \delta a. \quad (5.85)$$

При параллельном переносе тензора Кронекера, согласно (5.84), получим:

$$\delta(\delta_i^k) = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^r \delta_r^k - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{rs}^k \delta_i^r\right) \delta\xi^s = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^k - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{is}^k\right) \delta\xi^s. \quad (5.86)$$

Далее, из (5.86) и (5.85) имеем для „параллельного переноса" произведения $a^i\delta_i^k$:

$$\delta(a^i\delta_i^k) = \delta_i^k \delta a^i + a^i \delta(\delta_i^k) = \delta a^k + a^i \delta(\delta_i^k).$$

С другой стороны, это произведение равно a^k. Отсюда:

$$\delta a^k = \delta a^k + a^i \delta(\delta_i^k)$$

и в силу этого $\delta(\delta_i^k)$ должно обращаться в нуль. Соответственно имеем:

$$\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^k = \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{is}^k. \quad (5.87)$$

В дальнейшем различительные индексы I и II будем опускать.

Как уже отмечалось, Γ_{is}^k симметричны в своих нижних индексах, если возможно ввести такую систему координат, в которой Γ_{is}^k равны нулю, хотя бы в локальной области. С этого момента следует все время иметь в виду, что в дальнейшем будут рассматриваться только симметричные Γ_{is}^k. При этом Γ_{is}^k остаются еще в значительной степени произвольными. Однако они определятся однозначно, если их связать с метрическим тензором g_{ik} с помощью следующего условия: результат параллельного смещения вектора **a** должен быть одним и тем же как при применении закона (5.78) к его контравариантным координатам, так и при применении закона (5.79) к его ковариантным координатам. В этих двух представлениях a^i и a_k соответственно имеют в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ значения $(a^i + \delta a^i)$ и $(a_k + \delta a_k)$, где δa^i и δa_k даются с помощью (5.78) и (5.79). Условие того, что эти

два вектора являются представлениями одного и того же вектора $(\mathbf{a}+\delta\mathbf{a})$ в точке $(\xi^s+\delta\xi^s)$, выражается формулой:

$$a_k+\delta a_k=(g_{ik}+\delta g_{ik})(a^i+\delta a^i), \tag{5.88}$$

где

$$\delta g_{ik}=g_{ik,\,l}\,\delta\xi^l.$$

С точностью до членов высшего порядка по отношению к дифференциалам формула (5.88) должна быть справедлива для произвольных a^i и $\delta\xi^s$. Раскрывая скобки в правой части (5.88), получим:

$$\delta a_k=a^i g_{ik,\,l}\;\delta\xi^l+g_{ik}\delta a^i.$$

Подставляя δa_k и δa^i из (5.78) и (5.79), найдем

$$\Gamma^i_{kl}a_i\delta\xi^l=a^i g_{ik,\,l}\;\delta\xi^l-g_{ik}\Gamma^i_{sl}\;a^s\delta\xi^l$$

или

$$a^s\delta\xi^l(g_{si}\Gamma^i_{kl}+g_{ik}\Gamma^i_{sl}-g_{sk,l})=0, \tag{5.88a}$$

где a^s и $\delta\xi^l$ произвольны; поэтому выражение в скобках должно равняться нулю.

Далее используем условия симметрии и выпишем обращающееся в нуль выражение, три раза переставляя индексы:

$$\Gamma^r_{is}g_{kr}+\Gamma^r_{ks}g_{ir}-g_{ik,s}=0,$$
$$\Gamma^r_{ik}g_{rs}+\Gamma^r_{sk}g_{ir}-g_{is,k}=0,$$
$$\Gamma^r_{ki}g_{rs}+\Gamma^r_{si}g_{rk}-g_{ks,i}=0.$$

Первое уравнение вычитаем из суммы двух других. После приведения подобных членов получим уравнение:

$$g_{rs}\Gamma^r_{ik}=\frac{1}{2}\,(g_{is,k}+g_{ks,i}-g_{ik,s}). \tag{5.89}$$

Отсюда умножением на g^{sl} найдем окончательное выражение для Γ^l_{ik}:

$$\Gamma^l_{ik}=\frac{1}{2}\,g^{\,ls}(g_{is,k}+g_{ks,i}-g_{ik,s}). \tag{5.90}$$

Это выражение обычно называют символом Кристоффеля второго рода и обозначают знаком $\left\{ {l \atop ik} \right\}$,

$$\left\{ {l \atop ik} \right\} = \frac{1}{2} g^{ls} (g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}). \tag{5.90a}$$

Левая часть уравнения (5.89) называется символом Кристоффеля первого рода. Он обозначается знаком $[ik, s]$,

$$[ik, s] = \frac{1}{2}(g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}). \tag{5.89a}$$

В декартовых координатах оба символа Кристоффеля обращаются в нуль.

Понятие параллельного переноса является независимым от существования метрического тензора. Пространство, в котором определен закон параллельного переноса, назовем пространством аффинной связности, а Γ^l_{ik} — коэфициентами аффинной связности (affine connection). Когда задана метрика, ковариантные и контравариантные векторы эквивалентны; при этом Γ^l_{ik} принимает значение $\left\{ {l \atop ik} \right\}$, так что параллельный перенос вектора не зависит от выбора одного из двух возможных представлений.

Вернемся теперь к нашей первоначальной задаче — к образованию новых тензоров при помощи дифференцирования. Рассмотрим „тензорное поле", т. е. тензор, компоненты которого являются функциями координат. Возьмем тензор в точке (ξ^s) и сместим его параллельно самому себе в точку $(\xi^s + \delta\xi^s)$. Вычтем из величины тензорного поля в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ тензор, параллельно перенесенный в эту точку; эта разность также будет тензором. В случае смешанного тензора второго ранга его значение в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ будет

$$t^k_{i\cdot} + t^k_{i\cdot,s}\delta\xi^s,$$

а для значения параллельно перенесенного тензора найдем:

$$t^k_{i\cdot} + (\left\{ {r \atop is} \right\} t^k_{r\cdot} - \left\{ {k \atop rs} \right\} t^r_{i\cdot})\,\delta\xi^s.$$

Разность этих двух выражений равна

$$(t^k_{i\cdot,s} - \left\{ {r \atop is} \right\} t^k_{r\cdot} + \left\{ {k \atop rs} \right\} t^r_{i\cdot})\,\delta\xi^s. \tag{5.91}$$

То, что это выражение является тензором, видно из метода его получения. Так как $\delta\xi^s$ — произвольный вектор, выражение в скобках также является тензором. Этот тензор называется ковариантной производной от t_i^k по ξ^s. Ковариантная производная идентична с обычной производной, если $\left\{{l \atop ik}\right\}$ обращается в нуль, как это имеет место, например, в декартовых координатах. Приведем два из часто встречающихся обозначений ковариантной производной $\nabla_s t_i^k$ и $t_{i;s}^k$. Мы будем употреблять последнее.

Ковариантные производные произвольного тензора получаются прибавлением к обычным производным добавочных членов. Каждому контравариантному индексу соответствует добавочный член вида

$$t_{\ldots\ldots;s}^{\ldots\ldots i} = \ldots + \left\{{i \atop rs}\right\} t_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots r} + \ldots,$$

а к ковариантному индексу член вида

$$t_{\ldots k\ldots;s} = \ldots - \left\{{r \atop ks}\right\} t_{\ldots r\ldots} + \ldots .$$

Это определение удовлетворяет правилу дифференцирования произведения

$$(AB\ldots)_{;s} = A_{;s}B\ldots + AB_{;s}\ldots + \ldots,$$

независимо от того, будут ли некоторые из индексов у A, B, ... немыми.

Ковариантные производные метрического тензора равны нулю, так как равно нулю выражение в скобках в (5.88а), В силу того, что ковариантное дифференцирование согласуется с законом дифференцирования произведения, можно поднимать и опускать индексы под знаком дифференцирования:

$$a_{l;s} = g_{lk}a^k_{;s} \text{ и т. д.} \tag{5.92}$$

Геодезические линии. Символы Кристоффеля связаны не только с ковариантным дифференцированием или с параллельным переносом. Они также тесно связаны с задачами, непосредственно относящимися к метрике пространства, на-

пример с задачей нахождения дифференциальных уравнений „прямых“ линий, т. е. кратчайших линий в пространстве обобщенных координат. В эвклидовом пространстве кратчайшей линией, соединяющей две точки, является прямая. В общем случае римановых пространств линии, обладающие свойствами прямой, могут и не существовать; однако, вообще говоря, можно однозначно определить линию, являющуюся кратчайшей между двумя точками. Например, на поверхности сферы этими линиями являются большие круги. Такие кратчайшие линии называются геодезическими. Длина произвольной линии, соединяющей две точки P_1 и P_2, равна

$$s_{12}=\int_{P_1}^{P_2} ds=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{g_{ik}d\xi^i d\xi^k}=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{g_{ik}\frac{d\xi^i}{dp}\frac{d\xi^k}{dp}}\,dp, \quad (5.93)$$

где p — произвольный параметр.

Чтобы найти минимум выражения s_{12} при фиксированных пределах интегрирования, произведем варьирование согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\delta\int_A^B L(y_\alpha, y'_\alpha)\,dx=\int_A^B\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right)\right]\delta y_\alpha dx. \quad (5.94)$$

Экстремали при этом определяются уравнениями

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right)=0. \quad (5.95)$$

В нашем случае лагранжианом является подинтегральная функция в последнем выражении уравнения (5.93), где роль переменных y_α играют координаты ξ^i. Производные $\frac{\partial L}{\partial \xi^i}$ и $\frac{\partial L}{\partial \xi^{i'}}$ даются выражениями $\left(\xi^{i'}\right.$ обозначает здесь $\left.\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i}=\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}g_{ik,i}=\frac{1}{2}\frac{g_{ik,i}\xi^{i'}\xi^{k'}}{\sqrt{g_{rs}\xi^{r'}\xi^{s'}}}=\frac{1}{2}g_{ik,i}\xi^{i'}\xi^{k'}\frac{dp}{ds},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^{i'}}=\frac{g_{ii}\xi^{i'}}{\sqrt{g_{rs}\xi^{r'}\xi^{s'}}}=g_{ii}\xi^{i'}\frac{dp}{ds}.$$

Далее

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}}\right)=\frac{dp}{ds}\left[g_{il,k}\xi^{i'}\xi^{k'}+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right].$$

Отсюда имеем:

$$\delta s_{12}=\int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{dp}{ds}\left\{\left(\frac{1}{2}g_{ik,l}-g_{il,k}\right)\xi^{i'}\xi^{k'}-g_{il}\xi^{i''}+\right.$$

$$\left.+g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right\}\delta\xi^l dp. \qquad (5.96)$$

Выражение в скобках симметризуем по индексам i и k, так как они умножаются на выражения, симметричные относительно этих индексов:

$$\delta s_{12}=-\int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{dp}{ds}\left\{\frac{1}{2}\left(g_{il,k}+g_{kl,i}-g_{ik,l}\right)\xi^{i'}\xi^{k'}+\right.$$

$$\left.+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right\}\delta\xi^l dp. \qquad (5.97)$$

В скобках стоит то же самое выражение, что и в уравнении (5.89а). Дифференциальные уравнения геодезических линий, таким образом, получаем в виде

$$[ik,\,l]\,\xi^{i'}\xi^{k'}+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}=0,$$

или после умножения на g^{ls}:

$$\xi^{s''}+\left\{{s \atop ik}\right\}\xi^{i'}\xi^{k'}-\xi^{s'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}=0. \qquad (5.98)$$

Если за параметр выбрать длину дуги, последний член исчезает, и мы получаем

$$\frac{d^2\xi^l}{ds^2}+\left\{{l \atop ik}\right\}\frac{d\xi^i}{ds}\frac{d\xi^k}{ds}=0. \tag{5.99}$$

В декартовой системе координат второй член тождественно равен нулю, и уравнение (5.99) в этом случае выражает просто тот факт, что ξ^l является линейной функцией от s.

Мир Минковского и преобразования Лорентца. Вернемся теперь к нашему исходному пункту: к теории относительности в трактовке Минковского. По представлениям Минковского, обычное трехмерное пространство и время образуют четырехмерный континуум, „мир" с инвариантной „длиной" или „интервалом", определением которых служит формула (5.1). „Мировая точка" — это обычная точка, рассматриваемая в определенный момент времени; ее четыре координаты x, y, z и t в дальнейшем часто будут обозначаться через x^1, x^2, x^3 и x^4. Вводя „метрический тензор" $\eta_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{c^2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{c^2}, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & -\frac{1}{c^2}, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{Bmatrix}, \tag{5.100}$$

мы сможем записать (5.1) в виде

$$\tau_{12}^2=\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu. \tag{5.101}$$

Преобразования Лорентца — это такие линейные преобразования координат, которые переводят метрический тензор $\eta_{\mu\nu}$ в самого себя. Поэтому инерциальные системы специальной теории относительности аналогичны декартовым системам координат обычной трехмерной эвклидовой геометрии, а преобразования Лорентца соответствуют обычным трех-

мерным ортогональным преобразованиям. Коэфициенты этих преобразований подчиняются условиям типа (5.10а).

При произвольном линейном преобразовании (не обязательно преобразовании Лоренца) уравнения преобразования имеют вид:

$$x^{*\varkappa} = \gamma_i^{\varkappa} x^i + x_0^{*\varkappa}, \tag{5.102}$$

разности координат при этом преобразуются, как контравариантные векторы:

$$\Delta x^{*\varkappa} = \gamma_i^{\varkappa} \Delta x^i. \tag{5.103}$$

Для того чтобы преобразование было лорентцовым, необходимо соблюдение следующих условий при произвольных Δx^i:

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^{*\mu} \Delta x^{*\nu} = \eta_{i\varkappa} \Delta x^i \Delta x^\varkappa. \tag{5.104}$$

Подставляя $\Delta x^{*\mu}$ из (5.103), получим

$$\eta_{\mu\nu} \gamma_i^\mu \gamma_\varkappa^\nu \Delta x^i \Delta x^\varkappa = \eta_{i\varkappa} \Delta x^i \Delta x^\varkappa, \tag{5.105}$$

и в силу произвольности Δx^i

$$\eta_{\mu\nu} \gamma_i^\mu \gamma_\varkappa^\nu = \eta_{i\varkappa}. \tag{5.106}$$

Таким условиям должны удовлетворять коэфициенты преобразований Лорентца, что соответствует условиям (5.10а) для ортогональных преобразований.

Разница между четырехмерным эвклидовым пространством и миром Минковского заключается в том, что в последнем инвариант τ_{12}^2 не является положительно определенной формой. По этой причине не существует вещественных преобразований координат, переводящих форму (5.101) в форму (5.2б). Поэтому нам придется делать различие между ковариантными и контравариантными индексами.

Чтобы отличать координаты и тензоры в мире Минковского от координат и тензоров в обычном трехмерном пространстве, условимся относительно некоторых обозначений. Именно, латинские индексы будут относиться к обычному трехмерному пространству и пробегать значения от 1 до 3;

греческие индексы — к миру Минковского и пробегать значения от 1 до 4. Векторы и тензоры в мире Минковского мы будем называть „мировыми векторами“ и „мировыми тензорами“.

Контравариантный метрический тензор имеет компоненты

$$\eta^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} -c^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -c^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -c^2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{Bmatrix} \tag{5.107}$$

Если коэфициенты преобразования контравариантных тензоров γ^{ρ}_{σ} определяются условиями (5.106), то коэфициенты преобразования ковариантных тензоров являются решениями уравнений

$$\gamma^{\rho}_{\sigma}\gamma_{\rho}^{\tau}=\delta^{\tau}_{\sigma}. \tag{5.108}$$

Для получения явного выражения этих коэфициентов γ^{τ}_{ρ}, умножим уравнения преобразования ковариантного вектора

$$v^*_{\alpha}=\gamma_{\alpha}^{\beta}v_{\beta} \tag{5.109}$$

на $\eta^{\alpha\rho}$ и заменим v_{β} через $\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}$. В результате получим

$$\eta^{\alpha\rho}v^*_{\alpha}=\eta^{\alpha\rho}\gamma_{\alpha}^{\beta}\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}.$$

Выражение слева равно $v^{*\rho}$ и, следовательно, равно $\gamma^{\rho}_{\sigma}v^{\sigma}$, так что

$$\gamma^{\rho}_{\sigma}v^{\sigma}=\eta^{\rho\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta}\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}.$$

Далее в силу произвольности v^{σ} приравниваем коэфициенты:

$$\gamma^{\rho}_{\sigma}=\eta^{\rho\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta}\eta_{\beta\sigma}. \tag{5.110}$$

Наконец, умножая на $\eta_{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}$ и свертывая, получим

$$\gamma^{\nu}_{\mu}=\eta_{\mu\rho}\gamma^{\rho}_{\sigma}\eta^{\sigma\nu}. \tag{5.111}$$

Все алгебраические операции обобщенного тензорного исчисления применимы и к мировым тензорам. Детерминант

коэфициентов преобразования, как и в случае ортогональных преобразований, принимает только значения ± 1. Поэтому тензорные плотности с четным весом преобразуются как тензоры, а тензорные плотности с нечетным весом — подобно „аксиальным“ векторам трехмерного ортогонального формализма.

Компоненты метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ постоянны; соответственно, символы Кристоффеля равны нулю, и ковариантные производные совпадают с обычными производными. Такие обычные производные мы будем обозначать запятой:

$$\frac{\partial t^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^{\alpha}} = t^{\cdots}_{\cdots,\,\alpha}\,. \tag{5.112}$$

Теперь покажем, как коэфициенты преобразования Лорентца связаны с относительной скоростью двух систем координат: S и S^*. При равномерном и прямолинейном движении точки скорость ее определяется отношениями разностей координат любых двух мировых точек, лежащих на ее траектории:

$$u^i = \frac{\Delta x^i}{\Delta x^4}\,.$$

Скорость системы S относительно S^* есть скорость относительно S^* частицы P, покоящейся в системе S. В системе S первые три координатные разности частицы P, Δx^i равны нулю. Поэтому разности координат в системе S^* равны:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x^{*i} &= \gamma^i{}_4 \Delta x^4, \\ \Delta x^{*4} &= \gamma^4{}_4 \Delta x^4. \end{aligned}\right\} \tag{5.113}$$

Следовательно, скорость S относительно S^* будет равна:

$$v^{*i} = \frac{\gamma^i_4}{\gamma^4_4}\,. \tag{5.114}$$

С другой стороны, можно найти скорость S^* относительно S, используя коэфициенты „обратного“ преобразования γ^{ν}_{μ}, определяемые уравнениями (5.108). Поскольку эти последние являются коэфициентами преобразования $S^* \longrightarrow S$,

согласно (5.114), можно написать

$$v^l = \frac{\gamma_4{}^l}{\gamma_4{}^4}. \tag{5.115}$$

Используя уравнения (5.111), (5.100) и (5.107), правую часть можно записать в виде

$$v^l = -c^2 \frac{\gamma^4{}_l}{\gamma^4{}_4}. \tag{5.116}$$

Далее легко показать, что v^{*2} равно v^2. Образуем сперва трехмерную норму вектора v^{*l}, определяемого уравнением (5.114):

$$v^{*2} = \sum_{l=1}^{3} \frac{(\gamma^l{}_4)^2}{(\gamma^4{}_4)^2}.$$

В силу (5.106) для числителя можно написать

$$\sum_{l=1}^{3} (\gamma^l_4)^2 = c^2 [(\gamma^4{}_4)^2 - 1],$$

откуда найдем

$$v^{*2} = c^2 \frac{(\gamma^4{}_4)^2 - 1}{(\gamma^4{}_4)^2}. \tag{5.117}$$

Таким же образом преобразуем уравнение (5.116), имеем:

$$v^2 = c^4 \sum_{l=1}^{3} \frac{(\gamma^4{}_l)^2}{(\gamma^4{}_4)^2}.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{l=1}^{3} (\gamma^4{}_l)^2 = \frac{1}{c^2} [(\gamma^4{}_4)^2 - 1]$$

и

$$v^2 = c^2 \frac{(\gamma^4{}_4)^2 - 1}{(\gamma^4{}_4)^2}. \tag{5.118}$$

Отсюда мы видим, что γ^4_4 всегда определяется выражением

$$\gamma^4_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5.119}$$

Траектории, мировые линии. Обычно движение частицы вдоль траектории описывается заданием функциональной зависимости ее трех пространственных координат от времени t:

$$x^i = f^i(t). \tag{5.120}$$

Компоненты скорости определяются производными

$$u^i = \frac{df^i}{dt} = \dot{x}^i. \tag{5.121}$$

В теории относительности такой способ описания можно применять с таким же успехом, как и в нерелятивистской физике. Однако часто бывает удобно выбрать такой способ описания, при котором временная координата не играет обособленной роли по отношению к пространственным, как это имеет место в (5.120) и (5.121).

Движение точечной массы в мире Минковского изображается так называемой „мировой линией", которую лучше всего описывать в параметрическом представлении

$$x^\mu = g^\mu(p), \tag{5.122}$$

где p — произвольный параметр, определенный вдоль мировой линии. Такое параметрическое описание обычно употребляется в аналитической геометрии.

В трехмерной геометрии в качестве параметра p часто выбирают длину дуги. В мире Минковского таким параметром удобно считать собственное время τ вдоль мировой линии. Так же как длина дуги s в обычной геометрии определяется линейным интегралом

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

τ представляется интегралом дифференциала $d\tau$ вдоль мировой линии частицы

$$\int d\tau = \int \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} =$$

$$= \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau. \qquad (5.123)$$

Поэтому траекторию можно описывать уравнениями вида

$$x^\mu = F^\mu(\tau), \qquad (5.124)$$

где τ связано с x^μ дифференциальным уравнением. Деля подинтегральное выражение в (5.123) на dt и учитывая (5.121), получим

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (5.125)$$

Обычное описание скорости тела с помощью (5.120) и (5.121) при четырехмерном описании заменяется рассмотрением направления мировой линии. Если тело покоится, эта линия параллельна оси X^4. При движении тела мировая линия будет направлена под углом к оси X^4. Ее направление можно описывать при помощи касательного вектора

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \qquad (5.126)$$

Четыре величины U^μ являются компонентами контравариантного единичного вектора

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1. \qquad (5.127)$$

Это легко проверить, подставляя в уравнение (5.126) $d\tau$ согласно его определению

$$d\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu}.$$

Компоненты U^μ находятся в простой связи с компонентами скорости u^i, фигурирующей в уравнениях (5.121),

используя (5.125), получим

$$\left.\begin{aligned} U^4 &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ U^i &= \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = u^i U^4. \end{aligned}\right\} \qquad (5.128)$$

В следующих главах будем считать, что u^i и U^μ имеют тот же смысл, что и в настоящей главе. v^i будет использоваться исключительно для обозначения относительного движения двух систем координат.

При равномерном движении тела его направление в мире Минковского постоянно, и мировая линия является прямой. При таком описании закон инерции принимает особенно простую форму:

$$U^\mu = \text{const}. \qquad (5.129)$$

Задачи

1. Доказать, что правая часть в (5.90а) преобразуется согласно (5.82).

2. Доказать инвариантность свойств симметрии относительно индексов, имеющих один и тот же трансформационный характер.

3. Определить в трехмерном римановом пространстве дифференциальные операции градиента (скаляра), дивергенции и ротора и доказать справедливость соотношения

$$\text{rot grad}\, V = 0.$$

Рассматривая „аксиальные" векторы как антисимметричные тензоры второго ранга, определить также дивергенцию аксиального вектора и доказать соотношение

$$\text{div rot}\, \mathbf{A} = 0,$$

где $\mathbf{A}$ — полярный вектор.

4. Доказать справедливость в трехмерном пространстве следующих соотношений:

$$\delta_{ikl}\delta^{lkm} = 2\delta_i^m; \quad \delta_{ikl}\delta^{lmn} = \delta_k^m\delta_i^n - \delta_k^n\delta_i^m.$$

Найти аналогичные соотношения в мире Минковского.

5. Пользуясь соотношениями задачи 4, доказать справедливость в декартовой трехмерной геометрии следующего тождества:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A},$$

где $\mathbf{A}$ может быть как полярным, так и аксиальным вектором.

6. Вычислить в трехмерном пространстве два тройных произведения полярных векторов:

$$[\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]],\ (\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]).$$

7. Ввести на плоскости полярные координаты.

а) Найти компоненты метрического тензора.

б) Составить дифференциальные уравнения прямых линий.

8. На поверхности сферы радиуса R ввести так называемые однородные координаты Римана, которые характеризуются следующим выражением для бесконечно малого расстояния

$$ds^2=f(\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2),\ \text{где}\ f(0)=1.$$

а) Найти функцию $f(\xi^2+\eta^2)$ и уравнения преобразования, связывающие римановы координаты с обычными координатами долготы и широты.

Ответ.

$$f=\left[\frac{R^2}{R^2+\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)}\right]^2,$$

$$\xi=\frac{2R\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\cos\theta,$$

$$\eta=\frac{2R\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\sin\theta.$$

б) Найти дифференциальные уравнения больших кругов в обеих системах координат.

Замечание. Координаты Римана получаются при известном из теории функций комплексного переменного конформном преобразовании плоскости в сферу.

9. Оператор Лапласа в обобщенных координатах в n-мерном пространстве определяется, как дивергенция градиента скаляра:

$$\nabla^2 V = g^{rs} V_{;rs}.$$

а) Преобразовать правую часть, используя $\left\{ {i \atop mn} \right\}$.

б) Ввести систему координат, координатные линии которой всюду взаимно ортогональны, другими словами, в которой элемент длины имеет вид:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (h_i)^2 (d\xi^i)^2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

где h_i являются функциями ξ^s.

Выразить лапласиан через h_i.

Ответ.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi}{\varepsilon_i (h_i)^2} V_{,i} \right)_{,i}, \quad \Pi = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n.$$

Замечание. Это выражение часто используется для написания уравнения Шредингера в недекартовых координатах. Читатель легко может получить выражения для $\nabla^2 V$ в трех измерениях в сферических, цилиндрических и других координатах.

10. а) Показать справедливость следующего соотношения в n-мерном пространстве:

$$\left\{ {s \atop ms} \right\} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g})_{,m}, \quad g = |g_{ik}|.$$

б) Показать, что, если V^i является вектором, а F^{ik} — антисимметричным контравариантным тензором, то нижеследующие выражения представляют собой соответственно скаляр и вектор

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\, V^i)_{,i}; \quad \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\, F^{ik})_{,k}.$$

в) Выражение $\nabla^2 V$ в обобщенных координатах привести к форме, которая являлась бы обобщением соотношения, приведенного в ответе к задаче 9 (б).

11. Пусть V_i вектор, а F_{ik} — антисимметричный тензор. Показать, что нижеследующие величины ведут себя как тензоры при произвольных преобразованиях, несмотря на то, что производные берутся не ковариантные, а обыкновенные:

$$V_{i,k} - V_{k,i}; \quad F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k}.$$

12. Неравенство Шварца

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2$$

означает, что в n-мерном эвклидовом пространстве любая сторона треугольника меньше суммы двух других. Это утверждение можно записать в виде

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a} + \mathbf{b}|.$$

Возведя в квадрат, получаем

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geqslant \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Приводя подобные члены и возводя еще раз в квадрат, получим неравенство Шварца.

Вводя подходящую декартову систему координат, доказать неравенство Шварца, показав тем самым, что приведенное выше утверждение относительно сторон треугольника справедливо в пространстве любого числа измерений.

Другой метод доказательства может основываться на использовании положительной нормы векторного произведения

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2.$$

13. В n-мерном эвклидовом пространстве можно ввести m единичных взаимно ортогональных векторов $(\overset{1}{v}_i, \ldots, \overset{m}{v}_i)$; $m \leqslant n$;

$$\overset{k}{v}_i \overset{l}{v}_i = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Показать, что для любого вектора (f_i) справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{s=1}^{n} \{f_s^2 - [\sum_{a=1}^{m} (f_i \overset{a}{v}_i) \overset{a}{v}_s]^2\} \geqslant 0.$$

Это неравенство переходит в равенство при $m = n$.

14. Доказать, что векторное поле V_i в n-мерном пространстве может быть представлено, как поле градиента скалярной функции в том и только в том случае, если его ротор равен нулю:

$$V_{i,k} - V_{k,i} = 0.$$