Глава VI

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА ТОЧЕЧНЫХ МАСС

*

Задачи релятивистской механики. В главе IV мы возвели только фундамент специальной теории относительности. Однако до сих пор мы рассматривали только равномерное прямолинейное движение. Употребляемые нами для определения значений координат часы и масштабы двигались без ускорений. Мы заменили уравнения преобразования Галилея (4.14), связывающие две инерциальные системы, уравнениями Лорентца (4.13). Так же как и уравнения Галилея, эти последние являются линейными уравнениями преобразования, т. е. новые значения координат (пространства и времени) являются линейными функциями старых. Поэтому неускоренное движение в некоторой инерциальной системе остается неускоренным и после преобразований Лорентца.

Закон инерции (2. 1) *инвариантен относительно преобразований Лорентца.*

В оставшихся главах I части рассмотрим ускоренное движение, другими словами, построим релятивистскую механику. Это более сложно, чем построение механики классической, так как возникают двоякие затруднения. Во-первых, уравнения классической механики ковариантны относительно преобразований Галилея, но не по отношению к преобразованиям Лорентца. Поэтому мы должны развить лорентц-инвариантный формализм так, чтобы наши положения не зависели от выбора системы координат.

Вторая трудность имеет еще более глубокий смысл. В классической механике сила, действующая на тело в некоторый момент времени, определяется положением всех взаимодействующих тел в тот же момент времени. Закон „дальнодействующих“ сил может быть сформулирован только

в том случае, если имеет смысл выражение „положение всех взаимодействующих тел в тот же момент времени", т. е. если понятие „тот же момент" не зависит от выбора системы отсчета. Как мы знаем, такое условие не совместимо с теорией относительности.

Поэтому невозможно автоматически преобразовать каждый классический закон сил в лорентц-ковариантную форму. Мы можем иметь дело только с такими теориями, из которых может быть исключено понятие действия на расстоянии. Такая возможность существует в теории столкновений, поэтому в этой главе мы ограничимся в основном рассмотрением сил, возникающих при соударениях тел.

„Дальнодействие" можно исключить также при рассмотрении движения электрических зарядов в электромагнитном поле. Оказалось, что закон Кулона, основывающийся на понятии действия на расстоянии, справедлив только в электростатике. В общем случае сила, действующая на заряженную частицу, определяется не только положением окружающих зарядов. Однако релятивистское выражение для электромагнитных пондеромоторных сил может быть дано лишь после того, как мы познакомимся с законами преобразования электромагнитных полей. Поэтому мы начнем с рассмотрения теории столкновений.

Теория столкновений фактически является идеализацией, применяемой в обычной механике системы точечных масс в том случае, когда радиус действия сил мал в сравнении с размерами механической системы.

Предполагается, что взаимодействие имеет место только в продолжение того промежутка времени, когда расстояния между двумя телами или точечными масеами бесконечно малы. До и после этого бесконечно малого интервала времени тела движутся неускоренно. В течение короткого времени взаимодействия справедливы законы сохранения энергии и импульса. Если при ударе сохраняется кинетическая энергия, мы говорим об упругом ударе; если же часть или вся кинетическая энергия переходит в другие

формы энергии (тепло и так далее), говорят о **неупругом** ударе. Естественно, что механизм упругого удара более прост.

Законы сохранения. В классической механике существуют четыре закона сохранения: три для трех компонент импульса изолированной системы и один для ее энергии. При преобразовании пространственных координат три закона сохранения импульса преобразуются, как компоненты трехмерного вектора, в то время как закон сохранения энергии является инвариантом.

По отношению к преобразованиям Галилея законы сохранения импульса инвариантны, в то время как закон сохранения энергии оказывается справедливым в новой системе только в силу соблюдения законов сохранения энергии и импульса в старой системе. Классические законы сохранения не ковариантны относительно преобразований Лорентца, содержащих время. Поэтому их нужно сделать лорентц-ковариантными, причем последние должны переходить в классические законы при малых скоростях.

Релятивистские законы преобразования должны иметь такие же трансформационные свойства относительно преобразования пространственных координат, как и классические законы; иначе говоря, это опять должны быть векторный закон (с тремя компонентами) в случае импульса и скалярный закон в случае энергии. Этим в значительной мере определяется форма релятивистских законов.

Состояние движения точечной массы (т. е. так называемой материальной точки) полностью определяется ее массой m и скоростью $\mathbf{u}$. Если „релятивистский импульс" точечной массы при преобразовании пространственных координат преобразуется как вектор, и если этот импульс зависит только от состояния движения массы, то вектор импульса должен быть параллелен скорости u^i [см. (5.121)], так как скорость является единственным вектором, имеющимся в нашем распоряжении, иначе говоря, количество движения точечной массы должно записываться в виде

$$p_s = \mu(m, u)\, u^s, \tag{6.1}$$

где u абсолютная величина скорости, а μ функция от m и u, которая еще должна быть определена.

По тем же соображениям энергия должна быть также некоторой функцией от m и u. Эта функция связана с μ тем условием, что изменение энергии является произведением изменения импульса во времени на пройденный путь, т. е. скалярным произведением изменения импульса на скорость:

$$dE = d\mathbf{p}\cdot\mathbf{u} = d(\mu\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = d(\mu u^2) - \mu\mathbf{u}\,d\mathbf{u} = \\ = d(\mu u^2) - \mu u\,du = u\,d(\mu u),$$

или

$$\frac{dE}{dt} = u\frac{d}{dt}(\mu u). \tag{6.2}$$

Если функция μ известна, решая уравнение (6.2), можно определить функцию E.

Нахождение выражения для импульса. Для определения функции μ рассмотрим в качестве примера такое упругое соударение двух частиц, при котором в одной из систем координат скорости частиц до и после столкновения одинаковы. В этом случае μ будет постоянной величиной. Законы сохранения полностью определяют направления скоростей после столкновения. Далее можно показать, что при переходе к другой системе координат μ нужно выбрать единственным образом, совместимым с законами сохранения в новой системе.

Пусть две равные точечные массы m приближаются к началу координат системы S с противоположных направлений и достигают его в момент $t=0$. Их скорости соответственно имеют компоненты

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= a = -u_{2x}, \\ u_{1y} &= b = -u_{2y}, \\ u_{1z} &= 0 = u_{2z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Уравнениями движения до столкновения будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= at = -x_2, \\ y_1 &= bt = -y_2, \\ z_1 &= z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Предположим, что после столкновения x-компоненты скоростей остаются неизменными, а y-компоненты меняют знак. Таким образом скорости масс после столкновения будут равны:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_{1x} &= -\bar{u}_{2x} = a, \\ \bar{u}_{1y} &= -\bar{u}_{2y} = -b, \\ \bar{u}_{1z} &= \bar{u}_{2z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

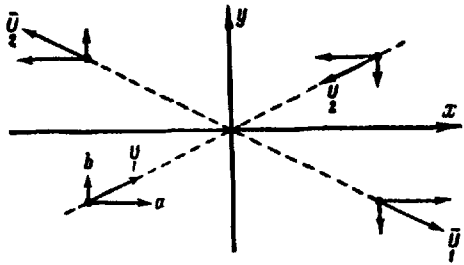
а уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\bar{x}_2 = at, \\ \bar{y}_1 &= -\bar{y}_2 = -bt, \\ \bar{z}_1 &= \bar{z}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Такое движение изображено на фиг. 7. Величина скоростей в результате столкновения не меняется, скорости обеих частиц остаются одинаковыми.

Несмотря на то, что до сих пор не делалось еще никаких предположений относительно функциональной зависимости μ от m и от u, можно быть уверенным, что наш пример не противоречит релятивистским законам сохранения. Таким образом, поведение частиц в нашем примере описано правильно, независимо от тех изменений законов классической механики, которые вызываются условиями релятивистской инвариантности.

В классической механике μ предполагается равным m (т. е. не зависит от u). Классические законы верны, по крайней мере приближенно, для малых (в сравнении с c) скоростей; поэтому μ при $u \longrightarrow 0$ должно принять значение m. Для получения зависимости μ от u рассмотрим



Фиг. 7. Столкновение двух частиц, имеющих одинаковые массы и скорости.

поведение наших частиц в новой системе S^*. Система S^* связана с исходной системой S уравнениями (4.13) или (4.15). Чтобы избежать ненужных усложнений, выберем относительную скорость v систем S^* и S, равной постоянной a из равенств (6.3) и последующих.

Преобразуя уравнения (6.4) и (6.6), получим уравнения движения до столкновения

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{x}^* = 0, && \underset{2}{x}^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\,t^*, \\ &\underset{1}{y}^* = \frac{bt^*}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{y}^* = -\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\,bt^*, \end{aligned}\right\} \qquad (6.4a)$$

и после столкновения

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{x}_1^* = 0, && \bar{x}_2^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}t^*,\\
&\bar{y}_1^* = -\frac{bt^*}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \bar{y}_2^* = +\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}bt^*.
\end{aligned}\right\} \quad (6.6а)$$

Скорости до столкновения будут

$$\left.\begin{aligned}
&u_{x\,1}^* = 0, && u_{x\,2}^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}},\\
&u_{y\,1}^* = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && u_{y\,2}^* = -\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}b,\\
&u_1^* = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && u_2^* = \frac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}},
\end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

а после столкновения

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_{x\,1}^* = 0, && \bar{u}_{x\,2}^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}},\\
&\bar{u}_{y\,1}^* = -\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \bar{u}_{y\,2}^* = \frac{\sqrt{1-a^2/c^2}}{1+a^2/c^2}b,\\
&\bar{u}_1^* = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \bar{u}_2^* = \frac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

Используя выражения (6.7) и (6.8), можно составить уравнения для „импульсов", содержащие неизвестную функцию μ. Обозначим „импульсы" отдельных частиц через $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, а их сумму, „полный импульс", через $\mathbf{p}$. До столкновения имеем:

$$\left.\begin{aligned} p_x^* &= \underset{1}{p}_x^* + \underset{2}{p}_x^* = 0 - \mu(m, \underset{2}{u}^*)\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \\ p_y^* &= \underset{1}{p}_y^* + \underset{2}{p}_y^* = \mu(m, \underset{1}{u}^*)\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} - \\ &\quad - \mu(m, \underset{2}{u}^*)\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\, b, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

а после столкновения

$$\left.\begin{aligned} \overline{p}_x^* &= 0 - \mu(m, \underset{2}{\overline{u}}^*)\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \\ \overline{p}_y^* &= -\mu(m, \underset{1}{\overline{u}}^*)\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} + \mu(m, \underset{2}{\overline{u}}^*)\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\, b. \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Закон сохранения для p_x^* удовлетворяется, если $\underset{2}{u}^*$ равно $\underset{2}{\overline{u}}^*$, в этом случае величина $\mu(m, \underset{2}{u}^*)$ равна $\mu(m, \underset{2}{\overline{u}}^*)$. С другой стороны, если $\underset{1}{u}^*$ равно $\underset{1}{\overline{u}}^*$, то p_y^* отличается от $\overline{p}_y^*$ только знаком. Отсюда следует, что закон сохранения для p_y^* требует, чтобы p_y^* обращалось в нуль. Таким

образом, мы получаем функциональные уравнения для μ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu(m, \underset{1}{u}^*) - \frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\mu(m, \underset{2}{u}^*) = 0,\\
&\underset{1}{u}^* = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}},\\
&\underset{2}{u}^* = \frac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

Переходя к пределу $b \longrightarrow 0$, получим более простое уравнение:

$$\mu(m, 0) = \frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\mu\left(m, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right). \qquad (6.12)$$

Уже было отмечено, что $\mu(m, 0)$ равно m. Для получения явного вида функции μ введем в качестве второго аргумента μ переменную u:

$$\left.\begin{aligned}
&u = \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \quad a = \frac{c^2}{u}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right],\\
&\frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},
\end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

тогда уравнение (6.12) примет вид:

$$\mu(m, u) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (6.14)$$

Другими словами, если вообще существуют лорентц-ковариантные законы сохранения, то встречающиеся в них векторные величины должны иметь вид:

$$p_s = \sum_a \frac{m_a u_a^s}{\sqrt{1 - \frac{u_a^2}{c^2}}}. \tag{6.15}$$

Это выражение называют „релятивистским" импульсом, чтобы отличать его от аналогичного классического вектора.

Релятивистская энергия одной точечной массы находится из (6.2):

$$\frac{dE}{dt} = u\frac{d}{dt}\left(\frac{um}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right), \tag{6.16}$$

иначе говоря, релятивистская кинетическая энергия равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + E_0, \tag{6.17}$$

где E_0 — постоянная интегрирования.

Лорентц-ковариантность новых законов сохранения. Не пользуясь формализмом, развитым в предыдущей главе было бы трудно доказать лорентц-ковариантный характер выражений (6.15) и (6.17). Однако, используя этот формализм, доказать ковариантность указанных выражений весьма просто. Так, сравнивая (6.15) с (5.128), увидим, что компоненты релятивистского импульса a-той частицы представляют собой первые три компоненты контравариантного мирового вектора $m_a U_a^i$, четвертой компонентой которого будет

$$m_a U_a^4 = \frac{m_a}{\sqrt{1 - \frac{u_a^2}{c^2}}}. \tag{6.18}$$

Это выражение в c^2 раз меньше релятивистской энергии (6.17) без постоянного члена. Четыре уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\sum_a \frac{m_a u_a^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \text{const}, \\ &\sum_a \frac{m_a}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \text{const} \end{aligned}\right\}. \tag{6.19}$$

являются, таким образом, ковариантными. Первый член уравнения (6.17) называется полной (релятивистской) энергией частицы. В силу своих трансформационных свойств он должен рассматриваться как фундаментальное выражение для энергии. Так как это выражение не обращается в нуль при $\mathbf{u} \longrightarrow 0$, то его часто разделяют на два выражения: mc^2 и

$$T = mc^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right]. \tag{6.20}$$

Величина mc^2 называется „энергией покоя" частицы, а T — ее „релятивистской кинетической энергией".

Связь между энергией и массой. Величину μ, выражающую зависимость импульса от массы, часто называют „релятивистской массой" частицы, а m соответственно „массой покоя". Релятивистская масса равна полной энергии, деленной на c^2; масса же покоя в c^2 раз меньше энергии покоя. Таким образом, в теории относительности существует весьма тесная связь между массой и энергией, не имеющая аналога в классической физике.

Эта связь делается еще более явной при рассмотрении неупругих соударений. Из классической физики известно, что при неупругих соударениях закон сохранения импульса применим без изменений, в то время как кинетическая энергия частично преобразуется в другие формы энергии.

Принимая во внимание преобразования Лорентца, мы найдем, что закон сохранения импульса выполняется только в том случае, если выполняется также закон сохранения энергии в форме (6.19); это означает, что если кинетическая энергия (6.20) механической системы уменьшается, должна увеличиваться ее энергия покоя, поэтому по крайней мере некоторые из входящих в систему масс покоя должны увеличиться. Таким образом, мы приходим к заключению, что все формы энергии связаны с массой соотношением

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \tag{6.21}$$

Установление эквивалентности энергии и массы является, по всей вероятности, важнейшим достижением релятивистской механики. Эта эквивалентность объясняет, например, дефект массы, наблюдающийся в атомных ядрах.

В классической физике существуют два отдельных закона сохранения: законы сохранения массы и энергии. В релятивистской механике имеется один общий закон сохранения полной энергии изолированной системы, причем массы покоя образующих систему точечных масс меняются при переходе кинетической энергии в другие формы энергии, и наоборот. Масса материального тела остается приблизительно постоянной, пока основная часть его энергии, энергия покоя, не участвует в подобных изменениях. Однако масса покоя меняется существенно, если энергии взаимодействия того же порядка величины, что и энергия покоя. Это имеет место во многих ядерных реакциях и особенно при рождении или аннигиляции электронно-позитронных пар.

При малых значениях $\frac{u}{c}$ релятивистская кинетическая энергия (6.20) переходит в классическое выражение, что легко видеть из разложения в ряд

$$mc^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = \frac{m}{2} u^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{c^2} + \ldots\right). \tag{6.20a}$$

Четырехмерный вектор

$$p^{\rho} = mU^{\rho} \tag{6.22}$$

часто называют вектором энергии-импульса.

Эффект Комптона. Интересным приложением релятивистских законов сохранения является теория эффекта Комптона. Рассмотрим „столкновение" γ-кванта и свободного электрона. При этом можно определить длину волны γ-кванта и скорость электрона после соударения, не делая никаких предположений относительно природы сил взаимодействия.

Формулы (6.15) и (6.17) неприменимы для γ-кванта, так как знаменатель $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ обращается в нуль при u, равном c. Более того, не имеет смысла говорить о „массе покоя" фотона, так как не существует системы отсчета, в которой он покоился бы. Вместо (6.17) будем использовать квантово-механическую связь между частотой и энергией

$$E = h\nu, \tag{6.23}$$

где h — постоянная Планка.

Компоненты импульса и энергия, деленная на c^2, образуют контравариантный мировой вектор. С другой стороны, частота ν преобразуется так, что выражение

$$\nu t - \frac{\nu}{c} k_s x^s \tag{6.24}$$

является инвариантом ($\mathbf{k}$ — трехмерный единичный вектор, перпендикулярный к фронту волны). Следовательно, величины $\left(-\frac{\nu}{c}\mathbf{k}, \nu\right)$ являются компонентами ковариантного мирового вектора, а величины $(+c\mathbf{k}\nu, \nu)$ в силу этого представляют контравариантные компоненты того же мирового вектора. Из уравнений преобразования, связывающих $\mathbf{p}$ с $\frac{E}{c^2}$, следует тогда, что импульс γ-кванта должен даваться

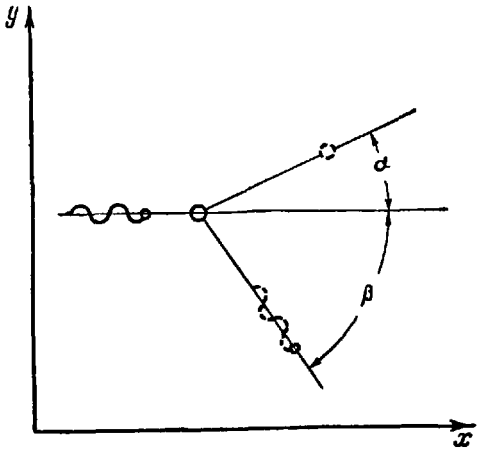
выражением

$$\mathbf{p}_\gamma = h\frac{\nu}{c}\mathbf{k}, \tag{6.25}$$

а его величина равна

$$p_\gamma = h\frac{\nu}{c}. \tag{6.26}$$

Сформулируем теперь условия, определяющие столкновение γ-кванта с электроном. Предположим, что первоначально γ-квант движется параллельно оси X, электрон покоится (фиг. 8).



Фиг. 8. Эффект Комптона.

Массу покоя электрона обозначим через m. После столкновения электрон будет двигаться под некоторым углом α к оси X, а γ-квант другой частоты $\bar{\nu}$ движется после столкновения в другом направлении, определяемом углом β. Введем такие координаты, так чтобы все траектории лежали в плоскости X, Y.

До столкновения полная энергия E и полный импульс P задаются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} E &= mc^2 + h\nu, \\ P &= \frac{h\nu}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

После соударения энергия равна

$$\bar{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + h\bar{\nu}, \tag{6.28}$$

а компоненты полного импульса в направлениях x и y будут

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\cos\alpha, \\ \bar{P}_2 &= -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Принимая во внимание законы сохранения, получим

$$\left.\begin{aligned} mc^2 + h\nu &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + h\bar{\nu}, \\ \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\cos\alpha, \\ 0 &= -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

Нас интересует $\bar{\nu}$ как функция угла рассеяния β. Поэтому исключим из уравнений сначала α, а затем u. Для исключения α изолируем в уравнениях для импульсов члены, содержащие α, затем возведем эти уравнения в квадрат и сложим. В результате вместо двух последних уравнений

(6.30) получим уравнение

$$\frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\bar{\nu}\cos\beta + \bar{\nu}^2) = \frac{m^2u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (6.31)$$

В первом уравнении (6.30) избавляемся от корня, изолируя член, его содержащий, и возводя в квадрат:

$$m^2c^2 + 2mh(\nu - \bar{\nu}) + \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\bar{\nu} + \bar{\nu}^2) = \frac{m^2c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (6.32)$$

Далее, вычитая (6.32) из (6.31), исключим u:

$$m(\nu - \bar{\nu}) - \frac{h}{c^2}(1 - \cos\beta)\nu\bar{\nu} = 0. \qquad (6.33)$$

Для того чтобы получить обычно употребляющееся выражение, заменим $1 - \cos\beta$ на $2\sin^2\frac{\beta}{2}$ и вместо частоты введем длину волны согласно формуле:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \bar{\nu} = \frac{c}{\bar{\lambda}}. \qquad (6.34)$$

Окончательно получим

$$\bar{\lambda} - \lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (6.35)$$

Наибольшее изменение длины волны имеет место, когда γ-квант рассеивается в обратном направлении. Оно равно в этом случае удвоенному значению так называемой комптоновской длины волны $\frac{h}{mc}$.

Релятивистская аналитическая механика. Теперь можно перейти к рассмотрению основ релятивистской аналитической механики. При этом предполагается, что читатель хорошо знаком с основными положениями классической аналитической механики, в силу чего последующий обзор будет затрагивать только те вопросы, которые имеют непосредственное отношение к содержанию этой книги.

Дифференциальные уравнения движения механической (классической) системы, подвергающейся действию консервативных сил, записываются в виде

$$\frac{\partial L}{\partial x^s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right)=0,\ L=T-V, \tag{6.36}$$

где T — кинетическая, а V — потенциальная энергия. Записанные так уравнения движения ковариантны не только относительно ортогональных преобразований пространственных координат, но и относительно произвольных преобразований n координат, соответствующих n степеням свободы системы.

Это так называемые уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационной проблемы. Вариационная проблема — это проблема нахождения таких кривых, соединяющих две фиксированные точки, вдоль которых данный криволинейный интеграл принимает экстремальное значение. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство с координатами x^s и t и криволинейный интеграл

$$I=\int_{P_1}^{P_2} L dt, \tag{6.37}$$

подинтегральная функция которого вдоль пути интегрирования зависит от координат x^s (и, возможно, t) и производных $\frac{dx^s}{dt}$. Варьируя при фиксированных конечных точках путь интегрирования на бесконечно малую величину, получим

$$\delta I=\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^s}\delta x^s+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\delta \dot{x}^s\right)dt=$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x^s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right)\right]\delta x^s dt, \tag{6.38}$$

где $\dot{x}^s$ обозначает $\frac{dx^s}{dt}$. Отсюда видно, что вдоль путей интегрирования, на которых величина I экстремальна, справедливы уравнения (6.36).

Импульсы определяются уравнениями

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}. \tag{6.39}$$

С помощью этих соотношений n дифференциальных уравнений (6.36) второго порядка могут быть преобразованы в $2n$ уравнений первого порядка. Для этого нужно решить n уравнений (6.39) относительно $\dot{x}^s$ и образовать так называемую функцию Гамильтона

$$H = -L + p_s \dot{x}^s, \tag{6.40}$$

где $\dot{x}^s$ предполагаются замененными решениями уравнений (6.39). Уравнения движения принимают теперь „канонической“ форму:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^s &= \frac{\partial H}{\partial p_s}, \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial x^s}. \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

Этот формализм в целом ковариантен относительно общих преобразований трех пространственных координат (в действительности, даже относительно более общих преобразований). Особенностью, представляющей для нас специфический интерес, является возможность введения вместо времени t другого параметра. Обозначим этот параметр через θ и определим его уравнением

$$dt = \frac{dt}{d\theta}\, d\theta, \tag{6.42}$$

где $\frac{dt}{d\theta}$ предполагается заданным. Производные по t будем обозначать точками, а по θ — штрихами. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} I &= \int L^* (x^s, x^{s\prime}, t, t')\, d\theta, \\ L^* &= t' L \left(x^s, \frac{x^{s\prime}}{t'}, t\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

Теперь уравнения Эйлера-Лагранжа можно выразить через новый лагранжиан от L^*. Производными от L^* по его аргументам будут

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L^*}{\partial x^s}=t'\frac{\partial L}{\partial x^s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial t}=t'\frac{\partial L}{\partial t}, \\ &\frac{\partial L^*}{\partial x^{s'}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial t'}=L-\dot{x}^s\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}=-H. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

В силу

$$\frac{d}{d\theta}=t'\frac{d}{dt}$$

уравнения Эйлера-Лагранжа приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x^s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right)=0, \\ &\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{dH}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Отметим, что определение импульсов (6.39) инвариантно относительно такого преобразования параметра. Однако, помимо импульсов, нужно рассматривать также компоненту, канонически сопряженную времени t. Она равна $-H$. Обозначим эту новую компоненту через $\mathfrak{E}$.

$(n+1)$ уравнения, определяющие импульсы, могут быть опять решены относительно $(n+1)$ величины $x^{s'}$ и t', и новый гамильтониан может быть определен как

$$H^*=-L^*+p_s x^{s'}+\mathfrak{E}t'=t'(-L+p_s\dot{x}^s+\mathfrak{E}). \tag{6.46}$$

Этот гамильтониан равен нулю. Однако если ε рассматривать как независимую переменную, его частные производные не исчезают. Они связаны с производными гамильтониана (6.40) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H^*}{\partial x^s}=t'\frac{\partial H}{\partial x^s}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial t}=t'\frac{\partial H}{\partial t}, \\ &\frac{\partial H^*}{\partial p_s}=t'\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial \mathfrak{E}}=t'. \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

Таким образом, мы можем прибавить к уравнениям (6.41) следующее:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.48}$$

Гамильтониан (6.40) представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий. Эта полная энергия изменяется во времени со скоростью $\frac{\partial H}{\partial t}$. Уравнение (6.48) не независимо от уравнений (6.41). Его можно получить из последних, не прибегая к методу преобразования параметра. Действительно, полный дифференциал H равен

$$dH=\frac{\partial H}{\partial x^s}dx^s+\frac{\partial H}{\partial p_s}dp_s+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

и в силу (6.41)

$$dH=-\frac{dp_s}{dt}dx^s+\frac{dx^s}{dt}dp_s+\frac{\partial H}{\partial t}dt.$$

Делением на dt получаем отсюда (6.48).

Преобразование параметра полезно в том отношении, что позволяет переходить от одного параметра t к другому параметру θ. Оба представления при этом эквивалентны.

Перейдем к рассмотрению релятивистской механики, причем сначала изучим движение частиц, на которые не действуют силы. Лагранжиан является некоторой функцией от $\frac{dx^s}{dt}$ (если за параметр выбрано t) или от $\frac{dx^s}{d\tau}$ (если параметр есть τ). В дальнейшем точками будем обозначать дифференцирование по t, а штрихами по собственному времени частицы τ. Производные лагранжиана по этим переменным дают значения импульсов. Импульсы, канонически сопряженные координатам x^s, определяются формулами (6.15). Четвертая компонента импульса (канонически сопряженная времени) согласно (6.44) равна

$$p_4=L^{(t)}-\dot{x}^s p_s, \tag{6.49}$$

где $L^{(t)}$ — лагранжиан, соответствующий параметру t.

Примем сначала за параметр время t. Из дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L^{(t)}}{\partial \dot{x}^s} = \frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad u^2 = \dot{x}^s\dot{x}^s \tag{6.50}$$

видим, что $L^{(t)}$ равно:

$$L^{(t)} = mc^2\left(k - \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right), \tag{6.51}$$

где k — постоянная интегрирования. При этом интеграл I принимает значение

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L^{(t)}dt = mc^2\left[k(t_2-t_1) - \tau(P_2, P_1)\right], \tag{6.52}$$

где $\tau(P_2, P_1)$ — собственное время вдоль пути интегрирования между двумя конечными точками P_1 и P_2. Этот интеграл лорентц-инвариантен, если k равно нулю. Выражение

$$mc^2k(t_2-t_1)$$

не зависит от пути интегрирования. Поэтому этот член ничего не дает для вариации δI, если пределы интеграла не варьируются. Мы увидим, что величина k определяет значение постоянной интегрирования E_0 в (6.17). Поскольку этот член неинвариантен, мы его опустим при переходе к четырехмерному представлению.

Уравнения

$$p_s = \frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{6.15а}$$

могут быть разрешены относительно $\dot{x}^s$:

$$\dot{x}^s = \frac{\frac{p_s}{m}}{\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}}. \tag{6.15б}$$

Гамильтониан определяется уравнением (6.40). В этом случае он равен

$$H^{(\ )} = mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} - k \right] = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - k \right). \tag{6.53}$$

Если k выбрать равным 1, $H^{(t)}$ равен релятивистской кинетической энергии; а при k, равным нулю, — полной энергии.

Для уравнений Гамильтона получаем

$$\dot{x}^s = \frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{\frac{p_s}{m}}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial x^s} = 0. \tag{6.54}$$

Перейдем теперь к параметру τ. Согласно (6.43)

$$L^{(\tau)} = t' L^{(t)} = -mc^2 \sqrt{t'^2 - \frac{1}{c^2} x^{s'2}} =$$

$$= -mc^2 \sqrt{\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota'} x^{\varkappa'}}. \tag{6.55}$$

Отсюда импульсы равны

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^{i'}} = \frac{mx^{i'}}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota'} x^{\varkappa'}}}; \\ p_4 &= \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^{4'}} = -\frac{mc^2 t'}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota'} x^{\varkappa'}}}, \quad p_\rho = -\frac{mc^2 \eta_{\rho\sigma} x^{\sigma'}}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota'} x^{\varkappa'}}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

Корни, входящие в уравнения (6.55) и (6.56), равны 1 [(см. (5.127)]. Если этого не учесть, решение уравнений (6.56) относительно $x^{\rho'}$ станет невозможным. Вообще говоря, можно было бы выбрать некоторый другой параметр вместо τ, скажем θ. При этом уравнения (6.56) имели бы точно такой же вид, только штрихи означали бы дифференцирование по θ. Однако в этом случае оказалось бы невозможным выразить $x^{\rho'}$ только через p_ρ. В рассмотренном же

случае мы используем то обстоятельство, что $x^{\rho'}$ являются контравариантными компонентами единичного вектора, а $-\frac{p_\rho}{mc^2}$ — ковариантными компонентами того же единичного вектора. $x^{\rho'}$ идентично с U^ρ. Решение может быть записано в виде:

$$x^{\rho'} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa}}, \tag{6.57}$$

который аналогичен (6.15б). Однако такой способ записи решения совершенно произволен.

Квадратный корень в знаменателе постоянен:

$$\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa} = mc^2. \tag{6.58}$$

Поэтому решение может быть записано в общем виде:

$$x^{\rho'} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2} \varphi(\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa / mc^2), \quad \varphi(1) = 1, \tag{6.57а}$$

где φ обращается в 1, когда аргумент равен 1, а в остальном совершенно произвольна. Используя (6.57а), получим для $L^{(\tau)}$, $x^{\rho'} p_\rho$ и $H^{(\tau)}$:

$$\left.\begin{aligned} L^{(\tau)} &= -\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa} \cdot \varphi, \\ x^{\rho'} p_\rho &= -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma}{mc^2} \cdot \varphi, \\ H^{(\tau)} &= \left[\sqrt{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma} - \frac{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma}{mc^2}\right] \cdot \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

Для краткости будем в дальнейшем обозначать квадратный корень через p. Для уравнений Гамильтона имеем

$$\left.\begin{aligned} p_\rho' &= -\frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial x^\rho} = 0, \\ x^{\rho'} &= \frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial p_\rho} = \frac{2\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{m^2 c^4}\left[p - \frac{p^2}{mc^2}\right]\varphi' + \\ &+ \left(\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{p} - 2\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2}\right) \cdot \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

где φ' означает производную от φ по ее аргументу. Первый член справа исчезает, так как выражение в квадратных скобках равно нулю. Второй член равен [см. (6.57а)]:

$$x^{\rho\prime} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2} = -\frac{p^\rho}{mc^2}. \tag{6.60а}$$

Появление произвольной функции φ не случайно. Интеграл (6.52) при $k=0$ равен длине дуги мировой линии в пространстве Минковского. Уравнения Эйлера-Лагранжа являются дифференциальными уравнениями геодезических линий, соответствующих уравнениям (5.99).

Дифференциальные уравнения (5.99) можно получить не только из вариационного интеграла (5.93), так как любой вариационный интеграл

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \psi \left(g_{ik} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} \right) ds \tag{6.61}$$

имеет вариацию

$$\delta I = 2 \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{rn} \frac{d^2\xi^r}{ds^2} + [rt, n] \frac{d\xi^r}{ds} \frac{d\xi^t}{ds} \right) \psi' \, d\xi^n \, ds,$$

т. е. приводит к тем же уравнениям геодезических линий.

В нашем случае в качестве лагранжиана можно использовать любую функцию

$$\Lambda^{(\tau)} = \Phi \left(\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota\prime} x^{\varkappa\prime} \right), \tag{6.62}$$

при этом импульсы определяются как

$$\pi_\rho = 2\eta_{\rho\mu} x^{\mu\prime} \Phi' \left(\eta_{\iota\varkappa} x^{\iota\prime} x^{\varkappa\prime} \right), \tag{6.63}$$

где Φ' — производная Φ по ее аргументу. Эти величины π_ρ идентичны импульсам (6.56), если

$$\Phi'(1) = -\frac{m}{2} c^2. \tag{6.64}$$

Таким же образом в качестве гамильтониана можно использовать любую функцию импульсов вида

$$H^{(\tau)} = X \left(\eta^{\iota\varkappa} \pi_\iota \pi_\varkappa \right). \tag{6.65}$$

Уравнениями, связывающими импульсы и скорости, будут:

$$x^{\rho\prime} = \frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial \pi_\rho} = 2\eta^{\rho\mu}\pi_\mu X'. \tag{6.66}$$

Величины π_ρ идентичны с p_ρ, если

$$X'(1) = -\frac{1}{2mc^2}. \tag{6.67}$$

Сила в релятивистской механике. Сила, действующая на ускоренно движущуюся точечную массу, может быть определена различными способами. Можно просто воспользоваться классическим определением и определять силу как производную импульса по времени:

$$f_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right), \quad u^2 = \dot{x}^s\dot{x}^s. \tag{6.68}$$

Производя дифференцирование в правой части, получим весьма громоздкое выражение:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} m\left[\delta_{st}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\frac{\dot{x}^s\dot{x}^t}{c^2}\right]\ddot{x}^t. \tag{6.69}$$

Определенная таким образом сила, вообще говоря, не параллельна ускорению. Она параллельна ускорению только в тех случаях, когда последнее параллельно или перпендикулярно скорости. Когда ускорение параллельно скорости, (6.69) принимает вид:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} m\ddot{x}^s. \tag{6.70}$$

Если же сила и скорость перпендикулярны друг другу, из (6.69) получаем:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} m\ddot{x}^s. \tag{6.71}$$

Коэфициенты при ускорении в правых частях (6.70) и (6.71) иногда называют соответственно „продольной массой" и „поперечной массой".

Сила f_s, определяемая формулой (6.68), не обладает простыми трансформационными свойствами. Однако существует мировой вектор, являющийся близким аналогом трехмерной силы. Определим „мировую силу“ как производную импульса по собственному времени:

$$F_\rho = \frac{dp_\rho}{d\tau}. \tag{6.72}$$

Первые три ее компоненты равны выражениям (6.68), умноженным на $\frac{dt}{d\tau}$,

$$F_s = \frac{m\ddot{x}^s}{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{m\dot{u}\dot{x}^s}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}. \tag{6.73}$$

При малых значениях $\frac{u}{c}$ эти выражения стремятся к $m\ddot{x}^s$. Четвертая ее компонента равна

$$F_4 = -\frac{m\dot{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}. \tag{6.74}$$

При малых $\frac{u}{c}$ ее значение приближается к величине работы, совершаемой за единицу времени, взятой с обратным знаком. Она равна сумме произведений трех первых компонент на $\dot{x}^s$, взятой со знаком минус.

Задачи

1. Исходя из лагранжиана (6.62), определить соответствующий гамильтониан. Показать, что уравнение (6.67) удовлетворяется, если гамильтониан получается из лагранжиана, удовлетворяющего уравнению (6.64).

2. Возбужденный атом с общей массой M, покоящийся в некоторой инерциальной системе, переходит в низшее энергетическое состояние, уменьшая свою энергию на ΔW. Он излучает фотон, испытывая при этом отдачу. Поэтому

частота фотона будет меньше, чем $\nu = \frac{\Delta W}{h}$. Найти эту частоту.

Ответ.

$$\nu = \frac{\Delta W}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta W}{Mc^2}\right).$$

3. Показать, что интеграл „релятивистской силы“ (6.68) вдоль трехмерного пути равен изменению релятивистской кинетической энергии (6.20) и что интеграл мирового вектора (6.72) вдоль мировой линии dx^ρ исчезает, если предположить, что масса покоя остается неизменной. Что произойдет, если масса покоя меняется во время движения?