*Глава VII*

★

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Когда Эйнштейном были получены законы преобразования уравнений Максвелла, четырехмерный формализм Минковского еще не был известен. Эйнштейн[1]) выражал производные, встречающиеся в уравнениях Максвелла, в новых координатах, связанных со старыми преобразованиями Лорентца. Исходя из принципа относительности, он потребовал, чтобы уравнения электродинамики имели в новой системе координат тот же вид, что и в старой. Поэтому он отождествлял линейные комбинации напряженностей полей, получающиеся после преобразований уравнений Максвелла, с напряженностями полей в новых координатах. Им было показано, что полученные таким образом законы преобразования обладают требуемыми свойствами, именно, что два последовательных преобразования эквивалентны одному преобразованию того же типа, и что обратное преобразование получается при изменении знака относительной скорости двух систем координат.

Однако такое непосредственное построение довольно громоздко. Мы пойдем несколько отличным путем, используя преимущества четырехмерного формализма, развитого в главе V.

**Уравнения электромагнитного поля Максвелла.** Мы всюду будем пользоваться электростатической системой единиц. Далее мы будем исходить из электронной теории Лорентца, согласно которой уравнения поля в пустоте

---

[1]) Цитированнная работа Эйнштейна, так же как другие основные оригинальные работы по теории относительности, собраны в сборнике „Принцип относительности", ОНТИ (1935). *(Прим. ред.)*

(т. е. когда диэлектрическая постоянная и магнитная восприимчивость равны единице) справедливы также и в материальной среде, причем поляризация и намагничение этой среды являются результатом смещения реальных зарядов и частичной ориентации элементарных магнитиков. Уравнения Максвелла записываются тогда следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{7.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}, \tag{7.4}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\sigma$ — плотность заряда, $\mathbf{I}$ — плотность тока. В пустоте плотности заряда и тока равны нулю.

Из уравнений (7.2) и (7.3) можно видеть, что напряженности поля могут быть выражены через производные скаляра $\varphi$ и вектора $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{7.6}$$

Дифференцируя уравнение (7.1) по времени и образуя дивергенцию уравнения (7.4), получим закон сохранения плотностей заряда и тока

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{7.7}$$

**Предварительные замечания о трансформационных свойствах.** По отношению к пространственным ортогональным преобразованиям величины $\varphi$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\sigma$ и $\mathbf{I}$ преобразуются независимо друг от друга. Но не все они являются векторами одного и того же типа. В главе V было показано, что в трехмерном векторном исчислении существуют два типа векторов: «полярные» и «аксиальные».

По отношению к зеркальному отражению системы координат они ведут себя по-разному: «аксиальный вектор» при этом меняет свое направление на обратное. Ротор «полярного вектора» является аксиальным вектором, и наоборот.

В линейном уравнении все члены должны, конечно, преобразовываться одинаковым образом; в противном случае уравнение не будет ковариантно относительно отражений. Из уравнений (7.2) и (7.4) видно, что **E** и **H** не могут быть векторами одного типа.

Мы привыкли считать знак заряда не зависящим от ориентировки координатной системы. Напряженность электрического поля представляет собой силу, действующую на единичный заряд, поэтому ее направление не должно изменяться при отражении системы координат. Таким образом **E** является полярным вектором. Отсюда следует, что **H** — аксиальный вектор, а **I** и **A** — полярные векторы.

Мы видели, что в трех измерениях «аксиальные векторы» эквивалентны антисимметричным тензорам второго ранга. В силу этого они могут входить вместе с «полярными» величинами в линейные ковариантные уравнения. С точки зрения ковариантности часто бывает удобно выражать эту эквивалентность явно и представлять **H** в виде антисимметричного тензора с компонентами

$$\left.\begin{aligned} H_{12} &= -H_{21} = H_z, \\ H_{23} &= -H_{32} = H_x, \\ H_{31} &= -H_{13} = H_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Запишем уравнения Максвелла в векторно-тензорной форме:

$$E_{s,s} = 4\pi\sigma, \tag{7.1a}$$

$$E_{s,r} - E_{r,s} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_{rs}}{\partial t} = 0, \tag{7.2a}$$

$$H_{rs,t} + H_{st,r} + H_{tr,s} = 0, \tag{7.3a}$$

$$H_{rs,s} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{I}_r}{\partial t}. \tag{7.4a}$$

Для уравнений (7.5) и (7.6) таким же образом получим

$$H_{rs} = A_{s,r} - A_{r,s}, \tag{7.5a}$$

$$E_r = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_r}{\partial t} - \varphi_{,r} \tag{7.6a}$$

Наконец, вместо уравнения (7.7) имеем

$$\mathbf{I}_{s,s} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{7.7a}$$

Ковариантный характер этих уравнений по отношению ко всем пространственным ортогональным преобразованиям координат (включая отражения) очевиден. Если бы мы представили **H** в виде псевдовектора, то ковариантность была бы гораздо менее очевидной, как это видно, например, из уравнения (7.4), которое в этом случае имело бы вид

$$\mathfrak{H}_{2,1} - \mathfrak{H}_{1,2} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}_3 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что только одно из уравнений (7.3а), в котором все три индекса различны, имеет нетривиальный смысл, остальные же удовлетворяются тождественно.

При переходе к новой, движущейся системе отсчета нельзя ожидать, что величины **E**, **H** и т. д. будут преобразовываться независимо друг от друга. Рассмотрим, например, электростатическое поле, в котором заряды покоятся по отношению к некоторой системе отсчета. В новой системе отсчета заряды будут находиться в движении, поэтому в ней будут наблюдаться токи, которых в первоначальной системе не было. Токи в свою очередь индуцируют магнитные поля, которых опять-таки не было в исходной системе. Наконец, в новой системе отсчета, в отличие от первоначальной, вектор **A**, соответствующий магнитному полю, не будет равен нулю. Этот пример показывает, что по отношению к преобразованиям Лорентца скалярный и векторный потенциалы преобразуются как компоненты одной и той же величины; то же самое справедливо для напряженностей электрических и магнитных полей и плотностей

зарядов и токов. Поэтому нужно попытаться описать, например, напряженности электрического и магнитного полей одним мировым тензором, который при чисто пространственном преобразовании координат распадался бы на два трехмерных вектора.

**Представление четырехмерных тензоров в трех плюс одном измерениях.** В предыдущей главе мы видели, что различные трехмерные величины часто являются компонентами некоторой четырехмерной величины. Например, «релятивистская масса», представляющая собой скаляр относительно ортогональных пространственных преобразований, и «релятивистский импульс», являющийся пространственным вектором, рассматриваемые *совместно*, представляют собой компоненты одного мирового вектора — вектора энергии-импульса.

И обратно, рассматривая лишь группу одних пространственных преобразований вместо группы общих преобразований Лорентца, мировой вектор или тензор можно разложить на несколько частей, преобразующихся независимо друг от друга. В случае чисто пространственных преобразований четырехрядная матрица коэфициентов преобразования, $\{\gamma^i_x\}$, примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \gamma^i_k, & \gamma^i_4 \\ \gamma^4_k, & \gamma^4_4 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} c_{ik}, & 0 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix}, \tag{7.9}$$

где $c_{ik}$ — коэфициенты ортогонального преобразования. Контравариантный мировой вектор $V^i$ преобразуется следующим образом:

$$V'^i = c_{ik} V^k, \quad V'^4 = V^4. \tag{7.10}$$

Мировой тензор второго ранга $V^{ix}$ подобным же образом можно разложить на трехмерный тензор, два трехмерных вектора и трехмерный скаляр:

$$\begin{aligned} V'^{ik} &= c_{im} c_{kn} V^{mn}, & V'^{i4} &= c_{im} V^{m4}, \\ V'^{4k} &= c_{kn} V^{4n}, & V'^{44} &= V^{44}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Если мировой тензор $V^{ix}$ симметричен, трехмерный тензор будет также симметричен, а оба вектора будут равны друг другу. Если тензор $V^{ix}$ антисимметричен, трехмерный тензор также будет антисимметричным (и поэтому эквивалентным «аксиальному вектору»), векторы будут равны и противоположно направлены, а скаляр равен нулю. Ковариантные векторы и тензоры могут быть разложены подобным же образом.

Четырехмерные ковариантные операции и уравнения могут быть разложены таким же образом, как мировые векторы и тензоры разлагаются на трехмерные тензоры, векторы и скаляры. Обозначим две составные части мирового вектора $V^i$ через $v_i$ и $v$. Дивергенция $V^i$ равна

$$W = V^i{}_{,i} = v_{i,i} + v_{,4} = \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (7.12)$$

Аналогично части, на которые раскладывается тензор $V^{ix}$, обозначим через $v_{ik}$, $\underset{1}{v}_i$, $\underset{2}{v}_k$ и $v$:

$$V^{ix} = \begin{Bmatrix} v_{ik}, & \underset{1}{v}_i \\ \underset{2}{v}_k, & v \end{Bmatrix}.$$

Дивергенция такого тензора $W^i$ может быть разложена на $w_i$ и $w$.

Система уравнений

$$V^{ix}{}_{,x} = W^i \qquad (7.13)$$

тогда разложится на две системы:

$$\left.\begin{aligned} V^{ix}{}_{,x} &= v_{ik,k} + \frac{\partial}{\partial t}(\underset{1}{v}_i) = w_i, \\ V^{4x}{}_{,x} &= \underset{2}{v}_{k,k} + \frac{\partial v}{\partial t} = w. \end{aligned}\right\} \qquad (7.13а)$$

Если мировой тензор $V^{ix}$ антисимметричен, эти уравнения могут быть записаны так, что будут содержать только векторы. Вместо трехмерного антисимметричного тензора $v_{ik}$

можно ввести «аксиальный вектор» $\mathbf{t}_s$ при помощи соотношений:

$$v_{ik} = \delta_{iks}\mathbf{t}_s, \quad \mathbf{t}_s = \frac{1}{2}\,\delta_{iks}v_{ik}. \tag{7.14}$$

Дивергенция тензора $v_{ik,k}$ примет тогда вид:

$$v_{ik,k} = \delta_{iks}\,\mathbf{t}_{s,k}. \tag{7.15}$$

Согласно уравнению (5.38б) она является $i$-й компонентой $\operatorname{rot}\mathbf{t}$. Для первой совокупности уравнений (7.13а) тогда имеем:

$$\operatorname{rot}\mathbf{t} + \frac{\partial}{\partial t}\underset{1}{\mathbf{v}} = \mathbf{w}. \tag{7.13б}$$

Как уже указывалось, если $V^{\alpha}$ антисимметричен, $\underset{2}{\mathbf{v}}$ равно $(-\underset{1}{\mathbf{v}})$.

Последнее уравнение в (7.13а) поэтому принимает вид

$$-\operatorname{div}\underset{1}{\mathbf{v}} = w. \tag{7.13в}$$

Антисимметричные производные раскладываются подобным же образом. Рассмотрим ковариантный мировой вектор $B_{\iota}$ с трехмерными составляющими $b_i$, $b$. Его четырехмерный ротор, $C_{\iota\alpha}$, может быть разложен следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} C_{ik} &= b_{k,i} - b_{i,k}, \\ C_{i4} &= b_{,i} - \frac{\partial b_i}{\partial t} = \underset{1}{c}_i. \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

Задавая «аксиальный вектор» $\mathfrak{D}_s$ уравнениями,

$$C_{ik}\,\delta_{iks} = \mathfrak{D}_s,$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \operatorname{rot}\mathbf{b}, \\ \underset{1}{\mathbf{c}} &= \operatorname{grad} b - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{7.16а}$$

Эти примеры показывают, как типичные четырехмерные соотношения распадаются на несколько кажущихся независимыми трехмерных векторных соотношений. Теперь можно перейти к рассмотрению уравнений поля Максвелла в четырехмерной форме.

**Лорентц-ковариантность уравнений Максвелла.** Если $\mathbf{H}$ отождествить с $\mathfrak{D}$, $\mathbf{A}$ с $\mathbf{b}$, $\mathbf{E}$ с $\frac{1}{c}\mathbf{c}$, $\varphi$ с $-\frac{1}{c}b$, то уравнения (7.16а) перейдут в уравнения (7.5) и (7.6). Это означает, что уравнения (7.5) и (7.6) лорентц-ковариантны, если предположить, что $\mathbf{A}$ и $(-c\varphi)$ преобразуются как компоненты ковариантного мирового вектора, а $\mathbf{H}$ и $c\mathbf{E}$ представляют шесть компонент ковариантного антисимметричного мирового тензора.

Объединение $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в один антисимметричный мировой тензор второго ранга образует основу релятивистской электродинамики. Мы покажем, что остальные уравнения поля также совместимы с таким законом преобразования.

Обозначим ковариантный мировой вектор с компонентами $(A_s, -c\varphi)$ через $\varphi_\iota$ и ковариантный тензор электромагнитного поля с компонентами

$$\left\{\begin{matrix} 0, & -H_3, & +H_2, & -cE_1, \\ H_3, & 0, & -H_1, & -cE_2, \\ -H_2, & +H_1, & 0, & -cE_3, \\ +cE_1, & +cE_2, & +cE_3, & 0. \end{matrix}\right\} \tag{7.17}$$

через $\varphi_{\iota\varkappa}$. Уравнения (7.5) и (7.6) представляются тогда системой

$$\varphi_{\iota\varkappa} = \varphi_{\iota,\varkappa} - \varphi_{\varkappa,\iota}. \tag{7.18}$$

Антисимметричное выражение $\varphi_{\iota\varkappa}$, определяющее ротор вектора, удовлетворяет уравнениям

$$\varphi_{\iota\varkappa,\lambda} + \varphi_{\varkappa\lambda,\iota} + \varphi_{\lambda\iota,\varkappa} = 0. \tag{7.19}$$

Это легко проверить, подставляя выражение (7.18) в левую часть уравнения (7.19). Те из уравнений (7.19), в которых, по крайней мере, два индекса равны, удовлетворяются тождественно, независимо от того, удовлетворяет антисимметричный тензор $\varphi_{ix}$ уравнению (7.18) или нет. Например,

$$\varphi_{12,2}+\varphi_{22,1}+\varphi_{21,2}\equiv 0$$

просто из-за антисимметрии $\varphi_{ix}$. В четырехмерном мире остаются только четыре нетривиальных уравнения со следующими комбинациями индексов (2,3,4), (1,3,4), (1,2,4), (1,2,3).Подставляя выражения (7.17) в (7.19), получим уравнения (7.2) и (7.3). Таким образом, эти два уравнения эквивалентны тензорному соотношению (7.19).

Остаются еще уравнения (7.1) и (7.4). По форме они подобны уравнениям (7.13б) и (7.13в). Уравнения (7.13б, в) были получены как трехмерное представление дивергенции контравариантного антисимметричного мирового тензора второго ранга. Подымая оба индекса у ковариантного тензора $\varphi_{ix}$, получим контравариантный тензор

$$\varphi^{ix}=\begin{Bmatrix} 0\ , & -c^4H_3, & +c^4H_2, & +c^3E_1, \\ +c^4H_3, & 0\ , & -c^4H_1, & +c^3E_2, \\ -c^4H_2, & +c^4H_1, & 0\ , & +c^3E_3, \\ -c^3E_1, & -c^3E_2, & -c^3E_3, & 0\ . \end{Bmatrix} \qquad (7.17а)$$

Дивергенция этого тензора имеет компоненты

$$\varphi^{ix}{}_{,x}=-c^4\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_i+c^3\,\frac{\partial E_i}{\partial t}\,,$$

$$\varphi^{4x}{}_{,x}=-c^3\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}.$$

Правые части равны $-4\pi c^3 I_i$ и $-4\pi c^3\sigma$. Отсюда видно, что $\mathbf{I}$ и $\sigma$ совместно образуют контравариантный мировой вектор, мировую плотность тока $I^p$, который связан с тензором поля $\varphi^{ix}$ уравнением

$$\varphi^{ix}{}_{,x}=-4\pi c^3 I^i. \qquad (7.20)$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям Максвелла (7.1) и (7.4).

При образовании дивергенции от (7.20) левая часть исчезает тождественно из-за антисимметрии $\varphi^{\iota\varkappa}$. Поэтому мы получаем одно уравнение, содержащее только компоненты $I^{\iota}$:

$$I^{\iota}_{,\iota} = 0. \tag{7.21}$$

Это уравнение идентично с (7.7).

Уравнения поля Максвелла лорентц-ковариантны, если входящие в них величины отождествить указанным выше способом с компонентами мировых векторов и мировых тензоров. Прежде чем перейти к рассмотрению выражения для пондеромоторных сил, мы коротко остановимся на вопросе о физическом смысле законов преобразования.

**Физический смысл законов преобразования.** Запишем закон преобразования тензора $\varphi^{\iota\varkappa}$:

$$\varphi^{*\mu\nu} = \gamma^{\mu}{}_{\iota}\gamma^{\nu}{}_{\varkappa}\varphi^{\iota\varkappa}, \tag{7.22}$$

Разделяя компоненты **H** и **E**, получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{*mn} &= \gamma^{m}{}_{l}\gamma^{n}{}_{k}\varphi^{lk} + (\gamma^{m}{}_{l}\gamma^{n}{}_{4} - \gamma^{m}{}_{4}\gamma^{n}{}_{l})\varphi^{l4}, \\ \varphi^{*m4} &= \gamma^{m}{}_{l}\gamma^{4}{}_{k}\varphi^{lk} + (\gamma^{m}{}_{l}\gamma^{4}{}_{4} - \gamma^{m}{}_{4}\gamma^{4}{}_{l})\varphi^{l4}. \end{aligned}\right\} \tag{7.22а}$$

Вместо того чтобы рассматривать наиболее общие преобразования Лорентца (которые могут включать и пространственные ортогональные преобразования), ограничимся выбором специальной совокупности коэфициентов $\gamma^{\mu}{}_{\iota}$, а именно совокупности коэфициентов в уравнениях (4.13). Тогда уравнения (7.22а) перейдут в уравнения преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{*12} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(\varphi^{12} + v\varphi^{24}), \\ \varphi^{*13} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(\varphi^{13} + v\varphi^{34}), \\ \varphi^{*23} &= \varphi^{23}, \\ \varphi^{*14} &= \varphi^{14}, \\ \varphi^{*24} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(\varphi^{24} - \frac{v}{c^2}\varphi^{21}\right), \\ \varphi^{*34} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(\varphi^{34} - \frac{v}{c^2}\varphi^{31}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.22б}$$

Вводя $E_s$ и $H_s$ согласно (7.17а), получим:

$$\left.\begin{aligned}
H_3^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(H_3 - \frac{v}{c}E_2\right),\\
H_2^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(H_2 + \frac{v}{c}E_3\right),\\
H_1^* &= H_1,\\
E_1^* &= E_1,\\
E_2^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(E_2 - \frac{v}{c}H_3\right),\\
E_3^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(E_3 + \frac{v}{c}H_2\right).
\end{aligned}\right\} \quad (7.22в)$$

Члены, содержащие **H**, в преобразованном **E** (и обратно) пропорциональны $v/c$. Компоненты **H** и **E** в направлении $v$ совсем не преобразуются.

Эти законы преобразования тесно связаны с законами Ампера и Фарадея. Рассмотрим точечный заряд, покоящийся в системе координат $S$. В системе $S^*$, движущейся относительно $S$, будет наблюдаться магнитное поле, равное векторному произведению напряженности электрического поля на скорость частицы в системе $S^*$, умноженному на $\frac{1}{c}$.

С другой стороны, рассмотрим магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом, покоящимся в системе $S$. При переходе к новой системе $S^*$ обнаружится электрическое поле, напряженность которого равна умноженному на $\frac{1}{c}$ векторному произведению скорости магнита (в системе $S^*$) на напряженность магнитного поля. Интеграл от **E** по замкнутому контуру, вообще говоря, не равен нулю.

Перейдем к рассмотрению законов преобразования **I** и $\sigma$. Пусть материальное тело конечных размеров с равномерно распределенным объемным зарядом покоится относительно системы $S$. Если объем тела $V_0$ и плотность заряда $\sigma_0$, то полный заряд $C$ равен

$$C = V_0\sigma_0. \quad (7.23)$$

Произведем теперь преобразование Лорентца (4.13). Благодаря лорентцову сокращению в $x$-направлении полный объем тела в $S^*$ будет:

$$V^* = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, V_0. \tag{7.24}$$

Плотность заряда в свою очередь преобразуется как четвертая компонента контравариантного вектора. В системе $S$ ток равен нулю, и поэтому

$$\sigma^* = \gamma^4{}_4\sigma_0 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\sigma_0. \tag{7.25}$$

Произведение $V$ на $\sigma$ остается неизменным; иначе говоря, заряд $C$ является инвариантом.

Плотность тока имеет в системе $S^*$ одну компоненту $I^{*1}$:

$$I^{*1} = \gamma^1{}_4\sigma_0 = -(1 - v^2/c^2)^{-1/2} v\sigma_0 = -v\sigma^*. \tag{7.26}$$

Таким образом, плотность тока равна произведению плотности заряда на скорость. Поэтому релятивистский закон преобразования для $\sigma$ и $\mathbf{I}$ согласуется с электронной теорией Лорентца, согласно которой всякий ток представляет собой движение зарядов.

**Градиентное преобразование.** Из так называемой второй серии уравнений Максвелла, т. е. из четырех уравнений (7.19), следует существование мирового вектора потенциала $\varphi_i$, ротором которого является тензор поля $\varphi_{ik}$. Однако при заданном электромагнитном поле мировой вектор потенциала определяется неоднозначно. К мировому вектору $\varphi_i$, удовлетворяющему уравнению (7.18), можно прибавить произвольное градиентное поле $\Phi_{,i}$; сумма

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i + \Phi_{,i} \tag{7.27}$$

будет попрежнему удовлетворять уравнениям (7.18), левые части которых останутся неизменными. Это преобразование мирового вектора потенциала путем прибавления градиента называется **градиентным преобразованием.**[1]) Гра-

---

[1]) Иногда пользуются терминами „калибровочное" преобразование и „калибровочная" инвариантность. (*Прим. ред.*)

диентное преобразование, конечно, не имеет ничего общего с преобразованием координат. Ни тензор поля $\varphi_{ix}$, ни мировой вектор плотности тока $I^i$ не изменяются при градиентных преобразованиях. Говорят, что эти величины и уравнения Максвелла (7.19) и (7.20) обладают **градиентной инвариантностью**.

**Уравнения движения.** Мы не можем непосредственно измерять электромагнитные поля. Мы наблюдаем только силы (т. е. ускорения), действующие на заряженные частицы. Поэтому, чтобы связать уравнения поля с непосредственными физическими наблюдениями, необходимо знать законы, определяющие поведение заряженных частиц. Классический закон устанавливает, что сила (сила Лорентца), действующая на частицу, равна:

$$m\dot{\mathbf{u}} = e\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H}\right], \tag{7.28}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость частицы, а $\times$ означает векторное произведение. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют собой напряженности электромагнитного поля, из которого исключено поле, создаваемое самой частицей. Это последнее имеет, конечно, особенность [1]).

В компонентах (трехмерных) это уравнение записывается так:

$$m\dot{u}^s = e\left(E_s + \frac{1}{c}\, u^r H_{sr}\right), \quad u^s = \dot{x}^s \tag{7.29}$$

---

[1]) Как в классической теории поля, так и в специальной теории относительности в уравнениях движения принимается во внимание только та часть поля, которая не обусловлена рассматриваемой частицей. Такое разделение поля неудовлетворительно, в особенности из-за того, что подобное разделение поля не является однозначно определенной математической операцией. Только общая теория относительности подводит нас к формулировке законов движения, в которые входит полное поле (см. главу XV).

[Утверждение автора о том, что в специальной теории относительности в выражении для силы Лорентца никогда не учитывается собственное поле частицы, не точно. Собственное поле может быть, по крайней мере отчасти, учтено и фактически учитывается введением силы радиационного трения. Подробнее см. Ландау и Лифшиц, «Теория поля», ГТТИ (1941), и Паули, «Теория относительности», ГТТИ (1947). (*Прим. ред.*)]

Уравнения (7.28) и (7.29) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа следующего вариационного принципа

$$\left.\begin{aligned} &\delta \int L^{(c)}\, dt = 0, \\ &L^{(c)} = \frac{m}{2} u^2 - e\varphi + \frac{e}{c} u^s A_s. \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

Импульсы, канонически сопряженные координатам, равны

$$p_s^{(c)} = \frac{\partial L^{(c)}}{\partial u^s} = mu^s + \frac{e}{c} A_s, \tag{7.31}$$

а гамильтониан

$$\left.\begin{aligned} H^{(c)} = -L^{(c)} + u^s p_s^{(c)} &= \frac{1}{2m}\left(p_s^{(c)} - \frac{e}{c} A_s\right)^2 + e\varphi = \\ &= \frac{m}{2} u^2 + e\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Рассмотрим лагранжиан $L^{(c)}$. Выражение

$$\varphi - \frac{1}{c} u^s A_s \tag{7.33}$$

отличается только множителем от лорентц-инвариантного скаляра. Действительно, умножая его на $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, получим

$$\begin{aligned} (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \left(\varphi - \frac{1}{c} u^s A_s\right) &= \frac{dt}{d\tau}\left(-\frac{1}{c}\varphi_4 - \frac{1}{c} u_s \varphi_s\right) = \\ &= -\frac{1}{c} U^\rho \varphi_\rho. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Что же касается первого члена в $L^{(c)}$, то, как мы знаем, в релятивистской механике он должен быть заменен выражением (6.51). Это выражение (при $k = 0$)

$$-mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} \tag{7.35}$$

также отличается от скаляра на тот же множитель $\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Таким образом, выражения (7.35) и (7.33) преобразуются одинаковым образом. Умноженные на $dt$, они

становятся скалярами. Поэтому можно образовать следующий лорентц-инвариантный интеграл

$$I=\int_{P_1}^{P_2}\left\{-mc^2\sqrt{1-u^2/c^2}-e\varphi+\frac{e}{c}u^sA_s\right\}dt. \quad (7.36)$$

Соответствующие ему уравнения Эйлера-Лагранжа также должны быть лорентц-ковариантны. Выбирая за параметр $\tau$, для (7.36) получим

$$I=\int_{P_1}^{P_2}\left\{-mc^2\sqrt{\eta_{\iota\varkappa}U^\iota U^\varkappa}+\frac{e}{c}U^\rho\varphi_\rho\right\}d\tau, \quad U^\rho=\frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (7.37)$$

Кроме того что этот интеграл лорентц-инвариантен, он обладает еще одним важным свойством. Мы видели, что $\varphi_\rho$ *определяется через* $\varphi_{\rho\sigma}$ *с точностью до градиента*. Поэтому прибавление произвольного градиента к $\varphi_\rho$ не должно влиять на получающиеся из лангранжиана уравнения движения. При замене $\varphi_\rho$ в (7.37) через $\bar{\varphi}_\rho$ из (7.27) интеграл преобразуется в следующий:

$$\bar{I}=I+\int_{P_1}^{P_2}\frac{e}{c}U^\rho\Phi_{,\rho}\,d\tau=I+\frac{e}{c}\int_{P_1}^{P_2}\Phi_{,\rho}\,dx^\rho=$$

$$=I+\frac{e}{c}\left[\Phi(P_2)-\Phi(P_1)\right]. \quad (7.38)$$

Значение интеграла $I$ меняется при градиентном преобразовании, *но изменение это зависит только от значений* $\Phi$ в конечных точках, а не вдоль всего пути интегрирования. Вариация $I$ при фиксированных пределах интегрирования поэтому не меняется при градиентном преобразовании; другими словами, уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие вариационной проблеме

$$\delta I=0,$$

обладают градиентной инвариантностью.

Первый член подинтегрального выражения в (7.37) может быть заменен любой скалярной функцией, удовлетво-

ряющей уравнениям (6.62) и (6.64). Однако, если за параметр выбрано $t$, то (7.36) дает единственный лорентц-инвариантный лагранжиан, ведущий к градиентно-инвариантным уравнениям.

Используя сначала лагранжиан (7.36), получим для импульсов

$$p_s = \frac{\partial L^{(t)}}{\partial u^s} = \frac{mu^s}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_s, \tag{7.39}$$

где $u^s$ определяется из

$$u^s = \frac{1}{m}\left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right)\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2}. \tag{7.40}$$

Подставляя эти выражения в $L^{(t)}$ и $p_s u^s$ найдем

$$L^{(t)} = \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2}\left(-mc^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{c} A_s \frac{p_s - \frac{e}{c} A_s}{m}\right) - e\varphi \tag{7.41}$$

и

$$p_s u^s = \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \frac{1}{m} p_s \left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right); \tag{7.42}$$

отсюда для $H^{(t)}$ получаем:

$$H^{(t)} = mc^2\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{mc^2}\right]^{1/2} + e\varphi. \tag{7.43}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие (7.36):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^s}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = eE_s + \frac{e}{c} u^r H_{sr}. \tag{7.44}$$

Уравнения Гамильтона, соответствующие уравнению (7.43):

$$\left.\begin{aligned} u^s &= \frac{\partial H^{(t)}}{\partial p_s} = \\ &= \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \frac{1}{m}\left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right), \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H^{(t)}}{\partial x^s} = \\ &= \frac{e}{m}\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right) A_{k,s} - \\ &- e\varphi_{,s} = eu^k A_{k,s} - e\varphi_{,s} \end{aligned}\right\} \quad (7.45)$$

при

$$\dot{p}_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{mu^s}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) + \frac{e}{c}(A_{s,k}u^k + A_{s,4}). \quad (7.46)$$

Уравнения (7.45), конечно, эквивалентны уравнению (7.44). Уравнение (7.44) дает выражение, наиболее удобное для практических применений.

Можно получить формулы более симметричного вида, используя в качестве параметра $\tau$. Заменим первый член в (7.37) выражением

$$-\frac{1}{2} mc^2 \eta_{\iota\varkappa} U^\iota U^\varkappa, \quad U^\iota = \frac{dx^\iota}{d\tau},$$

которое удовлетворяет уравнениям (6.62) и (6.64). Такой выбор функции $\Phi$ в уравнении (6.62), конечно, произволен, но с его помощью мы получим очень простые уравнения. Лагранжианом будет выражение

$$L^{(\tau)} = -\frac{1}{2} mc^2 \eta_{\iota\varkappa} U^\iota U^\varkappa + \frac{e}{c} U^\iota \varphi_\iota. \quad (7.47)$$

Импульсы равны

$$p_\rho = \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial U^\rho} = -mc^2 U_\rho + \frac{e}{c}\varphi_\rho, \quad (7.48)$$

а уравнения Эйлера-Лагранжа принимают форму

$$+mc^2\frac{dU_\rho}{d\tau}-\frac{e}{c}\varphi_{\rho,\sigma}U^\sigma+\frac{e}{c}U^i\varphi_{i,\rho}=0$$

или

$$-mc^2\eta_{\rho\sigma}\frac{dU^\sigma}{d\tau}=\frac{e}{c}\varphi_{\sigma\rho}U^\sigma. \qquad (7.49)$$

Первые три уравнения (7.49) идентичны с уравнением (7.44), умноженным на $\frac{dt}{d\tau}$. Четвертое уравнение не является независимым от первых трех. Свертывание уравнения (7.49) с $U^\rho$ приводит к тождеству

$$-mc^2\eta_{\rho\sigma}U^\rho\frac{dU^\sigma}{d\tau}-\frac{e}{c}\varphi_{\sigma\rho}U^\sigma U^\rho\equiv 0. \qquad (7.50)$$

Второй член тождественно обращается в нуль из-за антисимметричности $\varphi_{\sigma\rho}$. Первый член также равен нулю по следующей причине: компоненты $U^\rho$ представляют собой компоненты единичного вектора; дифференциал же вектора постоянной длины всегда перпендикулярен самому вектору. Несколько иным путем это можно показать так:

$$\eta_{\rho\sigma}U^\rho\frac{dU^\sigma}{d\tau}=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\eta_{\rho\sigma}U^\rho U^\sigma)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(1)\equiv 0. \qquad (7.51)$$

Отсюда видно, что уравнение (7.49) содержит только три действительно независимых уравнения.

Вектор $U^i$ может быть выражен через импульсы посредством уравнений

$$U^i=-\frac{1}{mc^2}\left(p^i-\frac{e}{c}\varphi^i\right). \qquad (7.52)$$

Теперь можно найти $H^{(\tau)}$:

$$H^{(\tau)}=-\frac{1}{2mc^2}\eta_{ix}\left(p^i-\frac{e}{c}\varphi^i\right)\left(p^x-\frac{e}{c}\varphi^x\right). \qquad (7.53)$$

Уравнениями Гамильтона будут

$$\left.\begin{aligned} U^\rho&=\frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial p_\rho}=-\frac{1}{mc^2}\left(p^\rho-\frac{e}{c}\varphi^\rho\right),\\ \frac{dp_\rho}{d\tau}&=+\frac{1}{mc^2}\left(p^\sigma-\frac{e}{c}\varphi^\sigma\right)\frac{e}{c}\varphi^\sigma{}_{,\rho}.\end{aligned}\right\} \qquad (7.54)$$

Они эквивалентны уравнениям (7.49).