Глава VIII

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

*

Предварительные замечания. Уравнения поля Максвелла содержат плотности заряда и тока. Известно, что в действительности заряд распределен в пространстве не непрерывно; заряд не равен нулю только в областях пространства, занятых элементарными частицами — электронами, протонами и т. д. Пока неизвестно, имеют ли эти области конечные размеры или являются „точками" и справедливы ли уравнения Максвелла внутри этих областей. Только при „макроскопической" трактовке при некоторых условиях возможно считать концентрированные заряды равномерно распределенными по некоторому объему и таким образом получить среднее электромагнитное поле.

С „макроскопической" точки зрения нас интересует в первую очередь поведение материи в целом, а не уравнения движения индивидуальных точечных масс и заряженных частиц. В этом смысле мы и будем в настоящей главе рассматривать „сплошные среды".

Однако если механика сплошных сред является лишь апроксимацией, то возникает вопрос, почему она существенна для развития теории относительности? С точки зрения теории относительности наиболее обещающими частями классической физики являются теории поля, так как теории дальнодействия не могут быть релятивистски модифицированы. В теории поля непрерывные переменные этого поля рассматриваются как основные физические величины, а не как средние беспорядочно распределенных точечных масс. Рассмотрение механики сплошных сред покажет нам, как ввести в теории поля, в частности в теорию электромагнитного поля, механические понятия энергии и импульса.

Нерелятивистская трактовка. При описании поведения так называемых сплошных сред — упругих тел, жидкостей и газов внимание фиксируется не на индивидуальных частицах, а на некотором выделенном элементе объема. С течением времени одни частицы попадают в этот объем, а другие его покидают. Движение каждой молекулы подчиняется общим законам механики, однако важно сформулировать эти законы так, чтобы в них входили не точечные массы и их положения, а локальные плотности массы, импульса и т. д. „Элемент объема" должен содержать достаточно большое количество отдельных частиц, чтобы средние значения имели смысл и являлись разумными непрерывными функциями четырех координат: x, y, z и t. Предположим, что можно определить локальные средние плотность и скорость. Вначале будем придерживаться нерелятивистской точки зрения. Обозначим плотность через ρ, а среднюю скорость через $\mathbf{u}$. Изменение плотности ρ в данном элементе объема определяется количеством втекающего в него вещества

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, \mathbf{u}) = 0. \tag{8.1}$$

Это уравнение, „уравнение непрерывности", выражает закон сохранения массы.

Чтобы получить уравнения движения, введем понятия „частного" („локального") и „полного" („материального") дифференцирования по времени. Рассмотрим некоторую характеристику среды q (скаляр, компонента вектора и т. д.) и ее изменение во времени. Если описывается ее изменение во времени в фиксированной точке (x^i), то в качестве производной нужно взять „частную или локальную производную" $\frac{\partial q}{\partial t}$. С другой стороны, это изменение можно относить к системе координат, движущейся вместе с выделенным элементом объема среды; иначе говоря, изменение q можно описывать так, как это представляется наблюдателю, движущемуся вместе с выделенным элементом материи. Тогда надо брать „полную или материальную

производную", обозначаемую через $\frac{Dq}{Dt}$. Последняя связана с частной производной соотношением

$$\frac{Dq}{Dt}=\frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} q=\frac{\partial q}{\partial t}+u^s\cdot q_{,s}. \tag{8.2}$$

Обозначим силу, действующую на единичный объем материи, через g_i. Тогда уравнениями движения будут

$$\rho\frac{Du^i}{Dt}=g^i, \tag{8.3}$$

или, используя (8.2), получим:

$$\rho\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^s u^i{}_{,s}\right)=g^i. \tag{8.3a}$$

Левую часть можно преобразовать к виду:

$$\left.\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^s u^i{}_{,s}\right)&=\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)-u^i\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho u^s u^i)_{,s}-\\&-u^i(\rho u^s)_{,s}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)+(\rho u^s u^i)_{,s}-\\&-u^i\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho u^s)_{,s}\right].\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

В силу уравнения непрерывности (8.1) выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и мы имеем

$$g^i=\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)-(\rho u^i u^s)_{,s}. \tag{8.5}$$

Сами силы могут быть двух типов. Во-первых, среда может подвергаться действию гравитационных, электрических или тому подобных полей, в которых сила, действующая на заданный бесконечно малый элемент объема, пропорциональна его величине. Такие силы называются „объемными силами". Будем обозначать их через f^i. Кроме того, нужно принять во внимание и другой тип сил, являющихся результатом возникающих внутри материальной среды напряжений. Частицы, принадлежащие двум смежным элементам объема, могут взаимодействовать друг с другом, причем сила их взаимодействия будет пропорциональна

площади соприкосновения этих объемов. Такие силы называются поэтому „поверхностными силами". Компоненты поверхностной силы dq^i линейно зависят от компонент вектора ориентированной площадки dA_k:

$$dq^i = -t^{ik} dA_k, \tag{8.6}$$

где вектор dA_k перпендикулярен площадке, а длина его равна площади последней. Сила dq^i является линейной функцией dA_k в силу того, что полная сила, действующая на бесконечно малый объем, зависит от его размера, но не от формы. Знак t^{ik} выбирается так, чтобы при направлении вектора dA_k по внешней нормали получалась сила, действующая со стороны окружающей среды на выбранный элемент объема. Это обычно принимаемое условие ведет к тому, что компоненты тензора напряжений, соответствующего обыкновенному изотропному давлению, становятся положительными.

t^{ik} должен быть симметричным в своих индексах:

$$t^{ik} = t^{ki}. \tag{8.7}$$

В противном случае момент количества движения изолированного тела ($\mathbf{f} = 0$) будет меняться во времени:

$$\frac{dM_i}{dt} = \int\limits_V \delta_{ikl} t^{kl} dV,$$

где интегрирование производится по объему тела [1]).

Сила, действующая на материю, заключенную в конечном объеме, равна:

$$G^i = \int\limits_V f^i dV - \oint\limits_S t^{ik} dA_k, \tag{8.8}$$

где f^i — плотность объемных сил. С помощью теоремы Гаусса второй интеграл по замкнутой поверхности можно преобразовать в объемный:

$$G^i = \int\limits_V \left(f^i - t^{ik}{}_{,k} \right) dV. \tag{8.9}$$

---

[1]) δ_{ikl} — тензорная плотность Леви-Чивита.

Таким образом, для плотности силы получаем:

$$g^i = f^i - t^{ik}{}_{,k}. \tag{8.10}$$

Сравнивая последнее уравнение с (8.5), получим нерелятивистские уравнения движения:

$$\frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + (\rho u^i u^k + t^{ik})_{,k} - f^i = 0. \tag{8.11}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением непрерывности (8.1) определяют поведение сплошной среды под действием напряжений и других сил.

Кроме того, существует закон сохранения энергии, согласно которому изменение энергии в элементе объема определяется балансом потока энергии, протекающего через этот элемент.

Поведение механической системы может быть полностью определено только в том случае, если известны t^{ik} и f^i. Объемные силы определяются внешними условиями, скажем, наличием гравитационного поля, в то время как напряжения зависят от внутренних деформаций или от потока материи. Например, в случае идеальной жидкости t^{ik} равно давлению p, умноженному на тензор Кронекера δ_{ik}. Само давление p является функцией плотности ρ и температуры, которая определяется из уравнения состояния жидкости. Нет необходимости определять компоненты напряжения, так как нас будут интересовать только их трансформационные свойства.

Специальная система координат. Для того чтобы получить лорентц-ковариантные законы, введем сначала специальную систему координат $\overset{0}{S}$, в которой среда покоится в мировой точке $\overset{0}{P}$. В этой мировой точке уравнения находятся особенно просто, так как все классические члены, в которые скорость входит не под знаком дифференциала, равны нулю. Первые производные от u^i равны при этом первым производным от U^i, а первая производная от U^4 исчезает. Сама компонента U^4 равна единице. Поскольку среда неподвижна, ее полная плотность энергии есть плот-

ность энергии покоя и равна плотности массы c^2, умноженной на ρ. Единственные изменения, которые нужно внести в классические законы, обусловлены релятивистской связью потока энергии с импульсом. Поэтому поток энергии должен рассматриваться во всех законах сохранения.

Сформулировав законы в специальной системе координат, мы придадим им форму тензорных уравнений.

Вначале рассмотрим перенос энергии, обусловленный движением среды только под действием механических напряжений. В дальнейшем мы распространим наш формализм также и на электромагнитное взаимодействие. Имея в виду это ограничение, сформулируем сперва закон сохранения энергии.

Изменение полной энергии, содержащейся в некотором объеме, определяется количеством энергии, втекающей в данный объем и вытекающей из него. Благодаря релятивистскому соотношению между энергией и массой поток энергии представляет собой не что иное, как плотность импульса, умноженную на c^2. Последняя состоит из двух частей: во-первых, мы имеем произведение плотности массы на скорость, $\rho\mathbf{u}$; во-вторых, к нему прибавляется поток энергии, создаваемый напряжениями. Рассмотрим ориентированную бесконечно малую площадку $d\mathbf{A}$. С обеих ее сторон на среду действуют силы, равные: $t^{rs}dA_s$ — с той стороны, куда направлена нормаль, и $(-t^{rs}dA_s)$ — с другой стороны. Если среда в окрестности этой поверхности движется со скоростью $\mathbf{u}$, то работа, производимая на одной стороне, равна $u^r t^{rs} dA_s$, а на другой, соответственно, $(-u^r t^{rs} dA_s)$. Количество энергии, полученное одной стороной, равно количеству энергии, потерянному другой; другими словами, имеет место поток энергии через поверхность, а компонентами вектора этого потока являются $u^r t^{rs}$. Соответствующая ему плотность импульса меньше в c^2 раз. Таким образом, полная плотность импульса равна:

$$P^s = \rho u^s + \frac{1}{c^2} u^r t^{rs} . \qquad (8.12)$$

В точке $\overset{0}{P}$ оба члена равны нулю, однако этого нельзя сказать об их производных. Для закона сохранения энергии получаем уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + P^s{}_{,s} = 0,$$

или

$$\rho_{,4} + \rho u^r{}_{,s} + \frac{1}{c^2} u^r{}_{,s}\, t^{rs} = 0. \qquad (8.13)$$

Подобным же образом можно написать уравнение, связывающее изменение плотности импульса во времени с плотностью сил. При нашем выборе системы координат в точке $\overset{0}{P}$ нет разницы между „частными" и „полными" производными. Таким образом получаем:

$$\rho\, u^l{}_{,4} + \frac{1}{c^2} u^r{}_{,4} t^{rl} + t^{lr}{}_{,r} = f^l. \qquad (8.14)$$

Уравнения (8.13) и (8.14) заменяют нерелятивистские уравнения (8.1) и (8.11).

Тензорная форма уравнений. Мы уже не раз убеждались, что релятивистские законы часто отличаются от классических только тем, что трехмерные векторы и тензоры заменяются соответствующими четырехмерными. Например, трехмерный импульс $m\mathbf{u}$ должен быть заменен мировым вектором mU^ρ, трехмерный антисимметричный тензор H_{mn} — антисимметричным мировым тензором $\varphi_{\mu\nu}$ и т. д. Из нерелятивистских уравнений (8.11) видно, что в релятивистских уравнениях должен играть важную роль симметричный тензор второго ранга; он состоит из двух членов: первый соответствует нерелятивистскому члену $\rho u^i u^k$, а второй t^{ik}. В согласии с этим мы введем сначала симметричный мировой тензор $t^{\kappa\lambda}$, имеющий в специальной системе $\overset{0}{S}$ в точке $\overset{0}{P}$ следующие компоненты:

$$t^{\kappa\lambda} = \begin{Bmatrix} t^{ik}, & 0 \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}. \qquad (8.15)$$

Это означает, что он удовлетворяет ковариантным уравнениям

$$t^{ix}U_x = 0. \tag{8.16}$$

С помощью этого мирового тензора можно иначе представить член $\frac{1}{c^2}\, u^r{}_{,4} t^{rl}$ из (8.14). Именно:

$$\frac{1}{c^2}\, u^r{}_{,4}\, t^{rl} = \frac{1}{c^2}(u^r t^{rl})_{,4} = (-U_r t^{rl})_{,4} = (-U_\rho t^{\rho l} + U_4 t^{4l})_{,4}. \tag{8.17}$$

В силу (8.16) первый член в скобках обращается в нуль, а во втором члене U^4 равно единице, так что можно записать

$$\frac{1}{c^2}\, u^r{}_{,4} t^{rl} = t^{l4}{}_{,4}. \tag{8.18}$$

Таким же образом в (8.13) можно преобразовать член $\frac{1}{c^2}\, u^r{}_{,s} t^{rs}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{c^2}\, u^r{}_{,s} t^{rs} = \frac{1}{c^2}(u^r t^{rs})_{,s} = -(U_r t^{rs})_{,s} =$$
$$= +(U_4 t^{4s})_{,s} = t^{4s}{}_{,s}. \tag{8.19}$$

После этого (8.13) и (8.14) принимают вид:

$$\rho_{,4} + (\rho u^s + t^{4s})_{,s} = 0, \tag{8.13а}$$
$$(\rho u^l + t^{4l})_{,4} + t^{ir}{}_{,r} = f^l. \tag{8.14а}$$

Как уже указывалось, U^4 равно единице, а его первые производные равны нулю. Поэтому замена u^i на U^i и умножение некоторых членов на U^4 меняют только форму уравнений:

$$(\rho U^4 U^4)_{,4} + (\rho U^s U^4 + t^{s4})_{,s} = 0, \tag{8.13б}$$
$$(\rho U^l U^4 + t^{l4})_{,4} + t^{is}{}_{,s} = f^l. \tag{8.14б}$$

Осталось еще только показать, что в первой скобке уравнения (8.13б) можно прибавить t^{44} и f^i заменить мировым вектором f^i.

Согласно уравнению (8.16) компонента $t^{44}{}_{,4}$ может быть следующим образом выражена через другие компоненты:

$$t^{44}{}_{,4} = (U_4 t^{44})_{,4} = -(U_s t^{s4})_{,4} = \frac{1}{c^2}(u^s t^{s4})_{,4}. \qquad (8.20)$$

И u^s и t^{s4} исчезают в $\overset{0}{P}$, поэтому производная от $u^s t^{s4}$ также обращается в нуль. В связи с этим в уравнении (8.13б) к выражению $(\rho U^4 U^4)_{,4}$ можно прибавить $t^{44}{}_{,4}$, не меняя значения первого члена.

По правой части уравнений (8.13б) и (8.14б) определяем мировой вектор f^ρ, компоненты которого в системе $\overset{0}{P}$ в точке $\overset{0}{S}$ равны $(f^i, 0)$. Он удовлетворяет ковариантному уравнению

$$f^\rho U_\rho = 0. \qquad (8.21)$$

После этих изменений (8.13б) и (8.14б) можно объединить в четырехкомпонентный ковариантный закон

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu} = f^\mu; \quad P^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + t^{\mu\nu}. \qquad (8.22)$$

Тензор $P^{\mu\nu}$ преобразуется, как контравариантный тензор, и его дивергенция является поэтому контравариантным вектором.

Рассмотрим вкратце физический смысл тензора $P^{\mu\nu}$ в системе координат, отличной от $\overset{0}{S}$. Произведем преобразование Лорентца наиболее простого типа, соответственно уравнениям (4.13), т. е. совершим переход к системе координат, в которой среда движется вдоль оси X со скоростью v. В этой системе координат компоненты тензора

$P^{\mu\nu}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&P^{*11}=\frac{t^{11}+\rho v^2}{1-v^2/c^2},\\
&P^{*12}=\frac{t^{12}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad P^{*13}=\frac{t^{13}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\
&P^{*22}=t^{22},\quad P^{*23}=t^{23},\quad P^{*33}=t^{33},\\
&P^{*14}=-\frac{\rho v+\frac{v}{c^2}t^{11}}{1-v^2/c^2},\\
&P^{*24}=-\frac{v}{c^2}\frac{t^{12}}{1-v^2/c^2},\quad P^{*34}=-\frac{v}{c^2}\frac{t^{13}}{1-v^2/c^2},\\
&P^{*44}=\frac{\rho+\frac{v^2}{c^4}t^{11}}{1-v^2/c^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.23)$$

Полная энергия свободно движущейся частицы превышает ее энергию покоя в $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ раз. Рассматривая вместо энергии плотность энергии, нужно принять во внимание, что объем, содержащий заданное число молекул, при движении испытывает сокращение в $(1-u^2/c^2)^{1/2}$ раз. Оба эффекта вместе приводят к тому, что полная плотность энергии (а потому и плотность массы) превышает плотность энергии покоя (или плотность массы покоя) в $(1-u^2/c^2)^{-1}$ раз. [В нашем случае u равно $(-v)$.] При этом рассуждении не принимались во внимание напряжения, вызывающие движение среды, однако оно поясняет в основном, почему ρ в уравнениях (8.23) везде умножается на $(1-u^2/c^2)^{-1}$.

Что касается компонент P^{rs} (без индекса 4), то они содержат t^{rs}, умноженные на различные степени выражения $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$, и „релятивистскую плотность массы" $(1-u^2/c^2)^{-1}\cdot\rho$, умноженную на $u^r u^s$.

Компоненты P^{r4} остаются компонентами плотности импульса; как указывалось выше, плотность импульса содержит члены, обусловленные наличием напряжений. P^{44} продол-

жает представлять собой плотность энергии. Член, обусловленный напряжениями, квадратичен относительно скорости среды.

Так же как в классической гидродинамике, система полностью определена, только если тензор $P^{\mu\nu}$ задан. Вернемся к случаю идеальной жидкости. В специальной системе координат $\overset{0}{S}$ тензор $P^{\mu\nu}$ имеет компоненты,

$$\begin{Bmatrix} p\delta_{ik}, 0 \\ 0 \quad \rho \end{Bmatrix},$$

иначе говоря, скалывающих напряжений нет, и давление изотропно. При преобразовании Лоренца $P^{\mu\nu}$ переходит в

$$\left\{ \begin{aligned} P^{\mu\nu} &= \rho U^\mu U^\nu - \frac{1}{c^2}(\eta^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu)\, p = \\ &= \left(\rho + \frac{1}{c^2} p\right) U^\mu U^\nu - \frac{1}{c^2} p \eta^{\mu\nu}, \end{aligned} \right\} \qquad (8.24)$$

где ρ и p связаны друг с другом и с температурой уравнением состояния жидкости.

$P^{\mu\nu}$ обычно называют тензором энергии-импульса. В нашем частном случае он специализирован в том смысле, что его компоненты P^{r4} обращаются в нуль в специальной системе координат. Пользуясь языком алгебры квадратичных форм, можно сказать, что U^i является собственным вектором матрицы $P^i{}_{\cdot x}$, а ρ — ее соответствующим собственным значением. Это не общее свойство тензора энергии-импульса; U^i — собственный вектор матрицы $P^i{}_{\cdot x}$ только, пока рассматривается перенос энергии посредством механического взаимодействия. Перейдем теперь к рассмотрению электромагнитного взаимодействия, где U^i уже не представляет собой собственного вектора матрицы $P^i{}_{\cdot x}$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. В предыдущей главе было показано, что действующая на заряженную точечную массу мировая сила $m\frac{dU^\rho}{d\tau}$, согласно (7.49), равна $\frac{e}{c^3}\varphi^\rho_{\cdot\sigma}U^\sigma$, где $\varphi^\rho_{\cdot\sigma}$ — (смешанный) тензор поля. Предположим теперь, что рассматриваемая в этой главе сплош-

ная среда содержит заряженные частицы, например электроны, и в таком количестве, что полем каждой частицы в сравнении с общим полем можно пренебречь. Можно принять $\varphi^{\rho}_{\cdot\sigma}$ за среднее полное поле в окрестности рассматриваемой частицы. Пусть, далее, элемент объема $d\overset{0}{V}$ покоится в $\overset{0}{S}$. Обозначим через σ собственную плотность зарядов заряженных частиц, т. е. плотность заряда в системе $\overset{1}{S}$, в которой заряженные частицы покоятся. Будем, далее, обозначать мировой вектор скорости заряженных частиц через W^{ι}, а скорость системы $\overset{0}{S}$ — через U^{ι}. Объем $d\overset{0}{V}$ в системе $\overset{1}{S}$ сокращается в $\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}$ раз $\left(\overset{1}{u}\text{ — относительная скорость систем } \overset{0}{S} \text{ и } \overset{1}{S}\right)$. Поэтому полный заряд, содержащийся в $d\overset{0}{V}$, будет

$$e=\sigma\cdot\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}\,d\overset{0}{V}. \tag{8.25}$$

Согласно (7.49) сила, действующая на этот заряд, равна:

$$\frac{dp^{\varkappa}}{d\overset{1}{\tau}}=\sigma\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}\cdot d\overset{0}{V}\cdot\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\varkappa}_{\cdot\sigma}W^{\sigma}, \tag{8.26}$$

где $p^{\varkappa}$ — мировой вектор импульса [см. уравнение (6.22)] и $\overset{1}{\tau}$ — время в системе $\overset{1}{S}$. По электронной теории Лорентца, собственная плотность заряда σ, умноженная на четырехмерную скорость W^{ι}, дает мировую плотность тока I^{ι}; поэтому можно написать

$$\frac{dp^{\varkappa}}{d\overset{1}{\tau}}=\sqrt{1-\frac{\overset{1}{u}{}^2}{c^2}}\,d\overset{0}{V}\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\varkappa}_{\cdot\sigma}I^{\sigma}. \tag{8.26a}$$

С другой стороны, желательно ввести $\overset{0}{S}$-время вместо собственного времени $\overset{1}{\tau}$. Из-за увеличения временного ин-

тервала изменение импульса на единицу $\overset{0}{S}$-времени отличается от изменения на единицу $\overset{1}{S}$-времени на множитель $\sqrt{1-\frac{\overset{1}{u}{}^2}{c^2}}$. Этот множитель сокращается с таким же множителем в правой части уравнения (8.26а), так что получаем:

$$\frac{dp^{\varkappa}}{\overset{0}{dt}}=\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\varkappa}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}\overset{0}{dV}. \tag{8.26б}$$

Это последнее уравнение не содержит более величин относящихся к системе $\overset{1}{S}$. Оно справедливо поэтому даже в том случае, когда среда содержит заряженные частицы различного рода (электроны, атомные ядра, ионы с различными массами и зарядами) с различными средними скоростями. Действительно, полная плотность тока равна сумме плотностей токов частиц каждого типа и, соответственно, производная по $\overset{0}{S}$-времени полной плотности импульса равна сумме производных плотностей импульсов различных частиц.

Уравнение (8.26б) поэтому справедливо постольку, поскольку среду можно считать непрерывной. Отсюда следует, что $\frac{1}{c^3}\varphi^{\varkappa}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}$ можно рассматривать как мировую силу на единицу собственного объема и подставить ее в правую часть уравнения (8.22). Тогда получаем:

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}. \tag{8.27}$$

Правую часть можно преобразовать так, чтобы она приняла вид дивергенции симметричного мирового тензора. Во-первых, I^{σ} определяем через напряженности поля из (7.20). Это дает:

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu}=-\frac{c^{-6}}{4\pi}\,\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu}. \tag{8.27а}$$

Во-вторых, интегрируем по частям:

$$\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu} = -(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma})_{,\nu} + \varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu}. \tag{8.28}$$

В последнем члене во втором множителе меняем местами индексы ν и σ. В силу антисимметрии $\varphi^{\nu\sigma}$ получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} &= \frac{1}{2}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} - \varphi^{\mu}_{\cdot\nu,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi_{\rho\sigma,\nu} - \varphi_{\rho\nu,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi_{\rho\sigma,\nu} + \varphi_{\nu\rho,\sigma}). \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

Принимая во внимание (7.19), это последнее выражение приводится к виду

$$\varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\varphi_{\sigma\nu,\rho} = +\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}(\varphi^{\nu\sigma}\varphi_{\nu\sigma})_{,\rho}. \tag{8.29a}$$

Из (8.28) можно получить, заменяя некоторые немые индексы,

$$\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu} = -\left(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}\right)_{,\nu}. \tag{8.28a}$$

Подставляя это выражение в (8.27а), окончательно находим:

$$\left[P^{\mu\nu} + \frac{c^{-6}}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} - \varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma}\right)\right]_{,\nu} = 0. \tag{8.30}$$

Рассмотрим теперь по порядку компоненты этого нового четырехмерного тензора. Положим

$$\frac{c^{-6}}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} - \varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma}\right) \equiv M^{\mu\nu} \tag{8.31}$$

и заменим $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi^{\mu\nu}$ выражениями (7.17) и (7.17а). Различные компоненты $M^{\mu\nu}$ даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} M^{44} &= \frac{1}{8\pi c^2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2), \\ M^{4s} &= M^{s4} = \frac{1}{4\pi c}\,\delta_{sik}E_iH_k, \\ M^{rs} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\,\delta_{rs}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2) - H_rH_s - E_rE_s\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8.32)$$

M^{rs} являются компонентами тензора напряжений электромагнитного поля, который был известен еще Максвеллу; M^{4s} представляют собой компоненты вектора Пойнтинга, разделенные на c^2; наконец, M^{44} есть плотность энергии электромагнитного поля, деленная на c^2. Эта последняя фигурирует также и в классической теории электромагнетизма.

Плоская электромагнитная волна обладает определенными плотностью и потоком энергии и вызывает определенные напряжения. Плоская волна, распространяющаяся в направлении оси X, имеет четырехмерный тензор энергии-импульса с компонентами

$$\left.\begin{aligned} M^{44} &= \frac{1}{4\pi c^2}A^2, \\ M^{14} &= \frac{1}{4\pi c}A^2, \\ M^{11} &= \frac{1}{4\pi}A^2, \end{aligned}\right\} \quad (8.33)$$

где A — совпадающие значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, все остальные компоненты равны нулю. Напряжение в направлении распространения положительно и называется „давлением излучения“.

Задачи

1. Как трансформируются давление радиации, плотность импульса и плотность энергии плоской электромагнитной волны при преобразовании Лорентца (4.13), примененном к уравнению (8.33)?

2. Преобразовать частоту ν той же самой плоской волны. Предполагая, что энергия фотона равна $h\nu$, найти закон преобразования плотности фотона.