Глава IX

ПРИМЕНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Экспериментальные подтверждения специальной теории относительности. В главе IV указывалось, что только теория относительности объясняет результаты опытов Майкельсона-Морлея и Физо и явление аберрации.

Опыты Майкельсона-Морлея были впоследствии повторены в различных условиях много раз [1]). При этом все новые опыты, за исключением опытов Д. С. Миллера, подтвердили первоначальный результат. Трудно сказать, почему опыты Миллера указывают на „увлечение эфира" со скоростью 10 км/сек. Поскольку все остальные эксперименты свидетельствуют о точности уравнений преобразования Лорентца, естественно предположить, что результаты Миллера обусловлены систематической экспериментальной ошибкой, сущность которой до сих пор еще не ясна.

Не так давно уравнения преобразования Лорентца были совершенно иным путем подтверждены Айвсом [2]). Айвс измерял так называемый релятивистский эффект Допплера. Частота света не инвариантна относительно преобразования Лорентца (см. задачу 3 главы IV). Ее закон преобразования имеет вид:

$$\nu^* = \nu \frac{1 - \cos\alpha \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9.1}$$

---

[1]) R. J. Kennedy, Proc. Nat. Acad. Sci., **12**, 621 (1926); Astrophys. J., **68**, 367 (1928). Piccard and Stahel, Comptes Rendus, **183**, 420 (1926); **185**, 1198 (1928); Naturwissenschaften, **14**, 935 (1926); **16**, 25 (1928). D. C. Miller, Rev. Mod. Phys., **5**, 203 (1933), где приводятся дальнейшие ссылки. G. Joos, Ann. d. Physik, **7**, 385, (1930).

[2]) H. E. Ives, J. Opt. Soc. Am., **28**, 215 (1938).

где α — угол между относительной скоростью двух систем координат и направлением распространения света в первоначальной системе координат. Этот релятивистский закон отличается от классического только знаменателем. Обычно релятивистский эффект второго порядка перекрывается классическим эффектом Допплера (зависящее от угла слагаемое в числителе), который является эффектом первого порядка относительно $\frac{v}{c}$.

Айвс измерял изменение частоты линии H_β, испускаемой каналовыми лучами водорода, пользуясь ускоряющими напряжениями до 18 000 вольт, т. е. скоростями до $1{,}8 \cdot 10^8$ см/сек $\left(\frac{v}{c} \sim 6 \cdot 10^{-3}\right)$. Чтобы отделить малый эффект второго порядка от гораздо большего эффекта первого порядка, Айвс измерял длину волны H_β каналовых лучей в двух направлениях: по и против направления их движения. При помощи зеркала обе смещенные линии и несмещенная линия покоящегося атома водорода одновременно фотографировались на одну и ту же фотографическую пластинку.

В соответствии с релятивистским законом (9.1) частоты обеих смещенных линий соответственно равны

$$\overset{*}{\nu}_1 = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \overset{*}{\nu}_2 = \nu \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а их средним значением будет выражение:

$$\overline{\nu} = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.2}$$

Айвс измерял смещение $\overline{\nu}$ относительно частоты несмещенной линии ν. При этом был подтвержден релятивистский закон преобразования.

Важность этого эксперимента состоит в том, что в нем непосредственно измеряется „удлинение времени“, кажущееся замедление движущихся часов [1]). Результат опыта Майкельсона-Морлея может быть объяснен, и впервые он так и был объяснен, только „лорентцовым сокращением“, т. е. сокращением расстояния между полупосеребренной пластинкой и зеркалом в направлении „движения сквозь эфир“.

С другой стороны, в экспериментах Айвса нет движущихся масштабов, а имеет место движение относительно наблюдателя „атомных часов“ (каналовых лучей) и замедление этих „часов“, которое является причиной „релятивистского эффекта Допплера“.

Все эти подтверждения теории относительности касались только применения преобразования Лорентца к световым лучам. Мы перейдем теперь к рассмотрению других модификаций классической теории, приведенных в главах VI и VII.

Многие явления ядерной физики говорят в пользу того, что инертная масса эквивалентна энергии. Масса ядра всегда меньше суммы масс составляющих его протонов и нейтронов. В ряде случаев можно показать, что дефект массы в c^2 раз меньше энергии, выделяющейся при образовании ядер [2]). Самым замечательным примером исчезновения массы является аннигиляция электронно-позитронной пары.

---

[1]) „Замедление часов“ особенно ярко проявляется при измерении времени жизни мезона в космических лучах. В то время как для покоящегося мезона $\tau = \tau_0 \approx 210^{-6}$ сек., для движущегося $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0 E}{mc^2}$, где E — полная энергия движущегося мезона. Так как $mc^2 \approx 100$ MeV, то при наблюдаемых энергиях $E \sim 1000$ MeV, $\frac{\tau}{\tau_0} \sim 10$. Подробнее см. Е. Л. Фейнберг „Распад мезона“ в сборнике „Мезон“, ГТТИ (1947). (*Прим. ред.*)

[2]) Cf. Rasetti Franco, Elements of Nuclear Physics, Prentice-Hall, Inc., New-York, p. 165 (1936) [имеется русский перевод, ГТТИ (1940)].

Массы электрона и позитрона при этом полностью превращаются в энергию электромагнитного излучения. Если вблизи взаимодействующей системы нет третьей частицы (ядра), полный импульс при аннигиляции должеи сохраняться. Так как скорости электрона и позитрона иепосредствеино перед аннигиляцией обычно малы, энергия и импульс будут сохраняться только в случае излучения двух γ-квантов в противоположных направлениях, так что их импульсы взаимно уничтожаются, а энергия каждого кванта соответствует массе одного электрона. Излучение с такой энергией — около 5.10^5eV — действительно наблюдается при аннигиляции позитронов.

Заряженные частицы в электромагнитном поле. Дальнейшая проверка специальной теории относительности основывается на изучении поведения частиц под действием сил. В главе IV был рассмотрен эффект Комптона, то есть „столкновения" γ-квантов с электронами. Теперь рассмотрим действие стацнонарных электромагнитных полей на заряженные частицы. Уравнениями движения будут уравнения (7.44):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=e\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{H}\right). \tag{9.3}$$

Для получения закона сохранения энергии умножим это уравнение скалярно на $\mathbf{u}$ и проинтегрируем обе стороны по частям. Слева получим

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\mathbf{u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{m\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\\
&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{m\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\\
&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)+mc^2\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-u^2/c^2}\right)=\\
&=\underline{mc^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)},
\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

а справа

$$\underline{e\mathbf{u}\mathbf{E}+\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{H}\right)}=e\mathbf{u}\mathbf{E}=\underline{e\mathbf{u}\left(-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}.$$

Таким образом, изменение энергии вдоль пути частицы определяется выражением

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]=-e\mathbf{u}\left(\operatorname{grad}\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{9.5}$$

Рассматривая изменение потенциала φ вдоль пути, можно выделить полный дифференциал из выражения $\mathbf{u}\operatorname{grad}\varphi$:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi_{,s}\frac{dx^s}{dt}+\varphi_{,4}=\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{9.6}$$

Уравнение (9.5) принимает тогда вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}+e\varphi\right]=+e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c}\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{9.7}$$

В статическом поле, где φ и $\mathbf{A}$ не меняются во времени, выражение слева в квадратных скобках остается постоянным.

Уравнение (9.7) дает возможность определить скорость частиц, попадающих в сильное электрическое поле с весьма малыми начальными скоростями. Их кинетическая энергия после прохождения разности потенциалов V будет

$$mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right\}=eV, \tag{9.8}$$

а их скорость

$$u=\sqrt{\frac{2eV}{m}\cdot\frac{1+\frac{e}{m}\frac{V}{2c^2}}{\left(1+\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}\right)^2}}. \tag{9.9}$$

Классическая формула

$$u_{\text{class}}=\sqrt{2\frac{e}{m}V},$$

является хорошим приближением, когда $\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}$ мало в сравнении с единицей.

Формула (9.8) показывает, что изменение энергии частицы равно произведению ее заряда на разность потенциалов. Этой формулой пользуются во всех случаях, когда энергия частицы при эксперименте определяется ускоряющей разностью потенциалов, как, скажем, это имеет место в электростатическом генераторе Ван-де-Граафа.

В камере Вильсона скорость заряженной частицы обычно определяется измерением радиуса кривизны ее траектории в постоянном магнитном поле, перпендикулярном направлению скорости. Определим этот радиус.

Ускорение заряженной частицы в магнитном поле определяется уравнением (9.3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)=\frac{e}{c}\,\mathbf{u}\times\mathbf{H}. \qquad (9.10)$$

Из уравнения (9.7) видно, что, когда $\mathbf{H}$ не зависит от времени, скорость u остается постоянной. Поэтому можно заменить вектор $\mathbf{u}$ произведением постоянной скорости u на единичный вектор $\mathbf{s}$, параллельный $\mathbf{u}$ и меняющий с течением времени свое направление. Левая часть уравнения (9.10) переходит в

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt},$$

а правая равна:

$$\frac{e}{c}\,u\mathbf{s}\times\mathbf{H},$$

так что для (9.10) получаем

$$\frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{e}{c}\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}. \qquad (9.10a)$$

Заменим теперь дифференцирование по t дифференцированием по длине дуги l. Так как $\frac{dl}{dt}$ есть скорость u, то вместо (9.10а) получим

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dl}=\frac{e}{c}\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}, \qquad (9.11)$$

где $\mathbf{s}$ — единичный касательный вектор вдоль пути и, следовательно, $\frac{d\mathbf{s}}{dl}$ является кривизной, обратная величина которой представляет собой радиус кривизны R. Отсюда имеем

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=R\cdot\frac{e}{c}\cdot H\cdot\sin(\mathbf{s},\mathbf{H}). \tag{9.12}$$

Угол $(\mathbf{s},\mathbf{H})$ постоянен вдоль пути. В этом легко убедиться путем скалярного умножения уравнения (9.10а) на $\mathbf{H}$, при этом правая часть обращается в нуль, в левую же часть в качестве множителя войдет производная от $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{H})$ по t. Поэтому частица будет двигаться по винтовой линии. Если $\mathbf{s}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны, траекторией будет окружность. В этом случае произведение RH определяет величину релятивистского импульса частицы

$$RH=\frac{c}{e}\cdot\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{c}{e}p. \tag{9.13}$$

Зная e и m, можно найти скорость и энергию частицы.

Иногда определяют отклонение заряженной частицы в электрическом поле, перпендикулярном ее траектории. Ускорение попрежнему определяется уравнением (9.3)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right\}=e\mathbf{E}. \tag{9.14}$$

Пока $\mathbf{E}$ и $\mathbf{u}$ взаимно перпендикулярны, скорость u остается постоянной. Вводя опять единичный вектор $\mathbf{s}$, вместо (9.14), получим:

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\mathbf{s}}{dt}=e\mathbf{E}. \tag{9.14а}$$

Переход к переменной длины дуги l приводит к уравнению

$$\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\mathbf{s}}{dl}=e\mathbf{E}, \tag{9.14б}$$

или, вводя радиус кривизны R,

$$\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=eRE. \tag{9.15}$$

В случае электрического поля траектории, конечно, не являются кругами. Уравнение (9.15) дает радиус кривизны только той части траектории, в которой направление движения перпендикулярно силовым линиям.

Для определения как массы покоя, так и скорости частицы необходимо исследовать ее поведение одновременно в электрическом и в магнитном полях. Можно, например, сообщить частице определенную энергию, ускоряя ее заданной разностью потенциалов [уравнение (9.8)], а затем по отклонению в магнитном поле определить ее импульс [уравнение (9.13)]; в таком случае одновременно вычисляются и масса и импульс частицы.

Опыты подобного рода использовались и для проверки релятивистских законов движения; при этом исследовалось множество частиц одного сорта, но обладавших различными скоростями. Все эти эксперименты подтвердили правильность релятивистских законов. Подробное описание этих экспериментов можно найти в статье В. Герлаха [1]).

Поле быстро движущейся частицы. Частицы, входящие в состав космических лучей, обычно движутся со скоростями, близкими к скорости света. Их электромагнитное поле родственно с электромагнитными волнами.

Определим поле такой быстро движущейся частицы. Для этого найдем сначала поле частицы в системе координат, в которой она покоится. Пусть в системе S^* частица всегда находится в начале координат: $x^* = y^* = z^* = 0$. Ее поле в этой системе чисто электрическое и задается уравнениями:

$$E_s^* = ex_s^* / r^{*3}. \tag{9.16}$$

Преобразование к другой системе координат S проведем в два этапа: сначала преобразуем компоненты электромагнитного поля, согласно уравнениям (7.22в), а затем выразим координаты, отмеченные звездочкой, через неотмеченные.

---

[1]) W. Gerlach, Handbuch d. Physik, **22**, pp. 61–62, Berlin, 1926.

Уравнения преобразования, обратные уравнениям (7.22в), получаются заменой знака при v противоположным. Так как все компоненты $\mathbf{H}^*$ равны нулю, то получаем

$$\left.\begin{aligned}
H_3 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot \frac{v}{c} \cdot E_2^*, \\
H_2 &= -(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot \frac{v}{c} \cdot E_3^*, \\
H_1 &= 0, \\
E_1 &= E_1^*, \\
E_2 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot E_2^*, \\
E_3 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot E_3^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны.

Найдем E_s^* как функции S-координат. Расстояние r дается выражением:

$$r^{*2} = x^{*2} + y^{*2} + z^{*2},$$

или, если заменить эти координаты выражениями (4.13):

$$r^{*2} = \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2. \qquad (9.18)$$

Для трех компонент E_s^* имеем

$$\left.\begin{aligned}
E_1^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
E_2^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot y, \\
E_3^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot z.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.19)$$

Тогда три компоненты E_s равны

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= e\frac{x - vt}{N}, \\
E_2 &= e\frac{y}{N}, \quad E_3 = e\frac{z}{N}, \\
N &= \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2},
\end{aligned}\right\} \qquad (9.20)$$

а для компонент H_s получим:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= -\frac{v}{c}\, e\, \frac{z}{N}, \\ H_3 &= +\frac{v}{c}\, e\, \frac{y}{N}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

Предположим, что скорость частицы космического излучения v почти равна скорости света, и рассмотрим поле этой частицы в некоторой точке (x, y, z), покоящейся в системе S. Амплитуда электрического поля

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2},$$

достигает максимума в момент времени $t_0 = \frac{x}{v}$; этот максимум тем более резко выражен, чем v ближе к c. В этот момент t_0 электрическое поле перпендикулярно оси X и по абсолютной величине равно напряженности магнитного поля. В фиксированной точке (x, y, z), находящейся на траектории частицы, поле быстро движущейся частицы приблизительно такое же, как поле узкого плоского волнового пакета.

Теория Зоммерфельда тонкой структуры водородных линий. Вскоре после того как Бору и Зоммерфельду удалось объяснить спектр атома водорода с помощью квантования адиабатических инвариантов, Зоммерфельд попытался в той же механической модели учесть релятивистские поправки. Он полагал, что релятивистские поправки объяснят расщепление термов, вырожденных в нерелятивистской теории, и что таким образом он получит теорию тонкой структуры.

Его попытка в случае атома водорода увенчалась успехом, но эта теория оказалась совершенно непригодной при объяснении спектров других атомов. Теперь известно, что объяснение тонкой структуры, данное Зоммерфельдом, неверно даже для водородного атома, так как оно не принимает во внимание спин электрона и не приводит к тем результатам, которые дает строгая волново-механическая

релятивистская трактовка этой же задачи для частиц со спином 0[1]). Однако в теории Зоммерфельда две ошибки — отсутствие строгого волново-механического подхода и пренебрежение спином — в случае водородного атома взаимно компенсируют друг друга. Поэтому эта теория, несмотря на указанные ошибки, приводит к правильному результату. Работа Зоммерфельда тем не менее интересна с исторической точки зрения, так как в ней впервые появляется „постоянная тонкой структуры" α. Поэтому здесь мы вкратце рассмотрим эту теорию.

Пусть электрон движется в поле протона, который вследствие его большой массы можно считать покоящимся. Уравнениями движения будут уравнения (9.14), где $\mathbf{E}$ задается следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \tag{9.22}$$

Интегралом этих уравнений будет интеграл энергии (9.8):

$$mc^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]-e\varphi(r)=W. \tag{9.23}$$

Другой интеграл, интеграл момента количества движения, получим, векторно умножая уравнение

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right\}=+e\operatorname{grad}\varphi \tag{9.24}$$

на радиус-вектор $\mathbf{r}$. Поскольку градиент φ всегда параллелен радиусу-вектору $\mathbf{r}$, правая часть обращается в нуль и получаем

$$0=\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2/c^2}}\right)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{r}\times\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9.25}$$

Производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в последнем члене равна $\mathbf{u}$, а векторное произведение $\mathbf{u}$ на самого себя равно нулю. Таким образом,

---

[1]) См., например, Л. де Бройль, „Магнитный электрон", Харьков (1936). (*Прим. ред.*)

мы находим, что выражение

$$\frac{m(\mathbf{r}\times\mathbf{u})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=p_\theta \tag{9.26}$$

является второй постоянной движения.

Введение полярных координат r, θ в плоскости движения приводит оба интеграла к виду

$$\left.\begin{aligned}&\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mc^2+\frac{e^2}{r}+W,\\&\frac{mr^2\dot\theta}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=I_\theta,\quad u^2=\dot r^2+r^2\dot\theta^2.\end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

Согласно Зоммерфельду, интеграл

$$\oint I_\theta d\theta,$$

взятый по полному периоду θ, должен быть целым, кратным h:

$$mr^2\dot\theta=n_\theta\cdot\hbar\cdot\sqrt{1-u^2/c^2},\quad \hbar=\frac{h}{2\pi}. \tag{9.28}$$

Чтобы сформулировать второе квантовое условие, нужно найти радиальную компоненту импульса

$$p_r=\frac{m\dot r}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9.29}$$

С помощью двух интегралов движения (9.27) можно выразить p_r как функцию только от r. Действительно, мы имеем

$$\left.\begin{aligned}p_r^2&=m^2\frac{\dot r^2}{1-u^2/c^2}=m^2\frac{u^2-r^2\dot\theta^2}{1-u^2/c^2}=\\&=m^2c^2\left(\frac{1}{1-u^2/c^2}-1\right)-\frac{m^2r^2\dot\theta^2}{1-u^2/c^2}.\end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

Сперва найдем выражение $\frac{1}{1-u^2/c^2}$ из интеграла энергии, т. е. из первой формулы в (9.27):

$$\frac{1}{1-u^2/c^2}=\left(\frac{mc^2+\frac{e^2}{r}+W}{mc^2}\right)^2. \tag{9.31}$$

Затем вычислим последний член в (9.30), исходя из квантовых условий (9.28). Имеем:

$$\frac{m^2r^2\dot{\theta}^2}{1-u^2/c^2}=\left(\frac{n_\theta\cdot\hbar}{r}\right)^2. \tag{9.32}$$

Подставляя выражения (9.31), (9.32) в (9.30), получим

$$p_r^2=m^2c^2\left[\left(\frac{mc^2+\frac{e^2}{r}+W}{mc^2}\right)^2-1\right]-\left(\frac{n_\theta\hbar}{r}\right)^2. \tag{9.33}$$

Второе кваитовое условие гласит, что интеграл

$$\oint p_r dr,$$

взятый по полному периоду изменения перемеиной r, должен быть также целым, кратным h:

$$\oint\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)\left(W+\frac{e^2}{r}+2mc^2\right)-\left(\frac{n_\theta\hbar}{r}\right)^2}dr=n_rh. \tag{9.34}$$

Подинтегральное выражение

$$\left.\begin{aligned}&2mW\left(1+\frac{W}{2mc^2}\right)+2e^2m\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)\frac{1}{r}-\\&\qquad-\frac{n_\theta^2\hbar^2}{r^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{n_\theta^2}\right),\\&\qquad\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}\end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

отличается от аналогичного нерелятивистского выражения вторыми членами в каждой скобке, представляющими собой релятивистские поправки.

Выражение (9.35) при отрицательных значениях W имеет два корня в области положительных r, что соответствует перигелию и афелию электронной орбиты. Интегрирование в (9.34) должно производиться от одного корня до другого и обратно с измененным знаком перед квадратным корнем в подинтегральном выражении. Оно может быть проведено либо элементарными методами, либо при помощи перехода в комплексную плоскость [1]). В результате получаем:

---

[1]) См., например, A. Sommerfeld, Atomic Structure and Spectral Lines, Appex, или П. Бриллюэн, Атом Бора, гл. VIII, ОНТИ, 1935.

$$\oint \sqrt{-A+2B/r-C/r^2}\,dr = 2\pi\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right), \quad (9.36)$$

где A, B и C — положительные постоянные. Подставляя их значения из уравнений (9.34), (9.35), найдем

$$2\pi\left\{\frac{mc^2\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)}{\sqrt{-2mW\left(1+\frac{W}{2mc^2}\right)}}-n_\theta\hbar\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n_\theta^2}}\right\}=n_r h. \quad (9.37)$$

Решая это уравнение относительно W, получим формулу тонкой структуры Зоммерфельда:

$$\left.\begin{aligned} W &= -mc^2\left\{1+\frac{\alpha^2}{\left[n_r+\sqrt{n_\theta^2-\alpha^2}\right]^2}\right\}^{-1/2}+mc^2= \\ &= \frac{mc^4}{2(n_r+n_\theta)^2\hbar^2}\left\{1+\frac{\alpha^2}{(n_r+n_\theta)^2}\left(\frac{n_r}{n_\theta}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (9.38)$$

Волны де Бройля. После Бора и Зоммерфельда следующий шаг в направлении развития строгой квантовой теории был сделан де Бройлем. Он предположил, что движение частицы вдоль траектории связано с распространением волн. Если траектория частицы замкнута, как, например, в атоме водорода, волны интерферируют между собой. Если на траектории умещается целое число длин волн, волны взаимно усиливаются. В противном случае они гасятся. Те траектории, вдоль которых волны усиливают друг друга, и являются „разрешенными" орбитами теории Бора-Зоммерфельда.

Рассмотрим свободную частицу, покоящуюся в некоторой системе координат S. Пусть ее масса покоя и энергия покоя будут соответственно равны m и mc^2. Мы не можем связать с этой частицей распространяющуюся волну, так как нет никаких данных, благодаря которым было бы выделено определенное направление распространения. Однако частице можно сопоставить частоту ν в соответствии с законом Эйнштейна

$$E = h\nu, \quad (9.39)$$

так что частота покоящейся частицы будет равна

$$\nu = \frac{mc^2}{h}. \tag{9.40}$$

Волна де Бройля может быть представлена в виде „волновой функции“

$$\psi = \psi_0 e^{2\pi i \nu t}. \tag{9.41}$$

Произведем теперь преобразование Лорентца (4.13), (4.15). Энергия и импульс частицы в системе S^* даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} &p_x^* = -\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_y^* = p_z^* = 0; \\ &E^* = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

Далее преобразуем волновую функцию ψ. Предположим, что ψ — скаляр. В этом случае ее зависимость от координат определяется формулой:

$$\psi = \psi_0 \cdot \exp\left\{ 2\pi i \nu \frac{t^* + \frac{v}{c^2} \cdot x^*}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\}. \tag{9.43}$$

Частота и длина волны имеют значения

$$\nu^* = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2/h}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E^*}{h}, \tag{9.44}$$

$$\lambda^* = \frac{c^2}{v\nu}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{p^*}. \tag{9.45}$$

Найдем скорость распространения в пространстве плоской гармонической волны де Бройля; эта скорость равна произведению частоты на длину волны:

$$w = \nu^* \lambda^* = \frac{E^*}{p^*} = \frac{c^2}{v}. \tag{9.46}$$

Эта скорость, так называемая фазовая скорость, превышает c; ее произведение на v равно c^2. Поскольку фаза волны де Бройля не может быть использована для передачи сигнала, уравнение (9.46) не противоречит основам теории относительности.

Рассмотрим, с другой стороны, волну де Бройля, не являющуюся строго гармонической, но состоящую из двух гармонических волн почти равной частоты. Амплитуда результирующей волны не будет постоянной, ее максимумы и минимумы будут двигаться в пространстве с некоторой скоростью, называемой „групповой скоростью". Определим эту групповую скорость w_g. Запишем составляющие волны в виде

$$\overset{1}{\psi} = \psi_0 \exp\left\{2\pi i\left(\overset{1}{\nu} t - \frac{x}{\overset{1}{\lambda}}\right)\right\}$$

и

$$\overset{2}{\psi} = \psi_0 \exp\left\{2\pi i\left(\overset{2}{\nu} t - \frac{x}{\overset{2}{\lambda}}\right)\right\}, \quad \overset{2}{\nu} = \overset{1}{\nu} + 2\delta\nu, \quad \overset{2}{\lambda} = \overset{1}{\lambda} + 2\delta\lambda.$$

Результирующей волной будет

$$\psi = \psi_0 \left[e^{2\pi i\left(\overset{1}{\nu} t - \frac{x}{\overset{1}{\lambda}}\right)} + e^{2\pi i\left(\overset{2}{\nu} t - \frac{x}{\overset{2}{\lambda}}\right)}\right]. \tag{9.47}$$

Квадратные скобки можно преобразовать с помощью соотношения

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Тогда имеем

$$\psi = 2\psi_0 \cos\left[2\pi\left(\delta\nu\cdot t + \frac{\delta\lambda}{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}}\cdot x\right)\right] e^{2\pi i\left[(\overset{1}{\nu}+\delta\nu)t - \frac{\overset{1}{\lambda}+\delta\lambda}{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}}x\right]} \tag{9.48}$$

Отсюда скорость распространения амплитуды равна

$$w_g = -\frac{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}\delta\nu}{\delta\lambda},$$

или, рассматривая $\delta\nu$ и $\delta\lambda$ как дифференциалы [1]),

---

[1]) Формула (9.49) является, как известно, общим выражением для групповой скорости, получаемым не только в результате рассмотрения двух волн, а путем исследования распространения некоторого волнового пакета (см., например, А. Марх, Основы квантовой механики, ГТТИ (1943). (*Прим. ред.*)

$$w_g = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{9.49}$$

В волне де Бройля $\frac{1}{\lambda}$ равно $\frac{p}{h}$, а ν равно $\frac{E}{h}$. Поэтому для групповой скорости получим:

$$w_g = \frac{dE}{dp}. \tag{9.50}$$

Далее, E и p связаны соотношением

$$E^2 - \frac{p^2}{c^2} = m^2c^4, \tag{9.51}$$

согласно которому абсолютная величина вектора энергии-импульса равна энергии покоя. Из

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \frac{p^2}{c^2}}$$

находим, что

$$\frac{dE}{dp} = \frac{\frac{p}{c^2}}{E} = u, \tag{9.52}$$

т. е. скорости частицы. Таким образом, групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы.

Задачи

1. Найти скорость электронов и протонов, ускоряемых разностью потенциалов 3.10^6 вольт.

2. а) Считая, что ускоряющий потенциал V в уравнении (9.9) настолько мал, что $\frac{u}{c}$ мало в сравнении с единицей, написать приближенные уравнения, дающие к классическим уравнениям релятивистскую поправку второго порядка относительно $\frac{u}{c}$.

б) Считая V настолько большим, что u близко к c, найти приближенное соотношение, определяющее разность между u и c как функцию разности потенциалов V.

3. Зная радиус кривизны траектории в камере Вильсона, найти скорость и энергию частицы, если ее масса и заряд известны.

4. Найти приближенное соотношение между энергией и импульсом частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света. Такое условие выполняется для частиц в космических лучах.