*Глава X*

# ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

*

**Введение.** Специальная теория относительности возникла при развитии электродинамики. Общая теория относительности является релятивистской теорией гравитации.

Некогда проблема гравитации положила начало новой эры в физике — эры ньютоновской классической механики. Три родоначальника научной физики — Галилей, Кеплер и Ньютон — изучили гравитацию: Галилей — квазиоднородное поле на поверхности земли, Кеплер и Ньютон — действие тяжелой точки большой массы на другую, значительно меньшей массы. Галилей сформулировал закон инерции и установил, что сила, действующая на тело, измеряется его ускорением (а не скоростью, как предполагалось ранее). Ньютон количественно определил гравитационное действие одной точечной массы на другую. Эта гравитационная сила всегда является силой притяжения и величина ее равна

$$f = \varkappa \frac{mM}{r^2}, \tag{10.1}$$

где $m$ и $M$ — массы двух материальных точек, $r$ — расстояние между ними и $\varkappa$ — универсальная постоянная, имеющая значение

$$\varkappa = 6{,}66 \cdot 10^{-8} \text{ дин. см}^2 \text{ г}^{-2}. \tag{10.2}$$

Сила, действующая на тело массы $m$, равна взятому со знаком минус градиенту гравитационного потенциала $G_M$, помноженному на эту массу $m$, причем на расстоянии $r$ от точечной массы $M$

$$G_M = -\varkappa \frac{M}{r}. \tag{10.3}$$

Потенциальная энергия системы, состоящей из двух тел $m$ и $M$, равна

$$U = mG_M = -\varkappa \frac{mM}{r}. \tag{10.4}$$

Эта теория гравитации является типичным и в сущности наиболее важным примером механической теории. Сила, действующая на точечную массу $P_m$ в момент времени $t$, полностью определяется расстоянием всех остальных точечных масс от $P_m$ в момент $t$, их массами и массой $m$ самой материальной точки $P_m$. Поэтому существенно, чтобы одновременность отдаленных событий и расстояние между двумя точечными массами имели инвариантную определенность. Теория гравитации Ньютона ковариантна по отношению к преобразованию Галилея, но, конечно, не по отношению к преобразованию Лорентца.

Работы Фарадея, Максвелла и Герца в области электродинамики внесли новые концепции, значительно отличающиеся от концепций классической механики. Действие на расстоянии одной точечной массы на другую, типичное для механики, в электродинамике заменилось действием поля на точечную массу и зависимостью поля от положений и скоростей точечных масс. Другими словами, взаимодействие происходит не непосредственно между двумя удаленными точечными массами, а между точками поля, находящимися на бесконечно малых расстояниях друг от друга.

В дорелятивистской физике механическая теория гравитации и теория электромагнитного поля были основаны на одних и тех же представлениях о пространстве и времени; поэтому, несмотря на фундаментальные различия обеих теорий, они не противоречили друг другу. Однако после того, как анализ трансформационных свойств уравнений Максвелла привел к созданию специальной теории относительности, эти теории перестали быть совместимыми. В то время как теория Максвелла исключает действие на расстоянии только из сферы электродинамики, трансформационные уравнения Лорентца устраняют действие на расстоянии из всей физики за счет лишения времени и пространства

их абсолютного характера. Для того чтобы теория гравитации соответствовала этим представлениям, она должна быть превращена в релятивистскую теорию. Однако анализ основных положений ньютоновской теории с точки зрения теории поля показывает, что „релятивизация“ теории гравитации необходимо связана с обобщением специальной теории относительности, получившим теперь название общей теории относительности. Проследим за теми рассуждениями, которые приводят к необходимости такого обобщения.

**Принцип эквивалентности.** Сила тяготения отличается от всех других сил тем, что она пропорциональна массе того тела, на которое действует. С другой стороны, в уравнениях движения классической механики (2.13) компоненты силы, действующей на тело, также пропорциональны его массе. Поэтому постоянный множитель $m_i$ с обеих сторон сокращается, и мы получаем, что *ускорение тела в гравитационном поле не зависит от его массы.*

Теория гравитации Ньютона констатирует этот факт, но не объясняет его. С точки зрения классической физики едва ли даже можно требовать какого-либо „объяснения“. Другие силовые законы — закон Кулона для электростатических сил, природа сил Ван-дер-Ваальса — также не могут быть „объяснены“. Однако закон Ньютона имеет особое, более широкое значение. Масса тела, отношение силы к ускорению, является постоянной, характеризующей поведение тела под действием сил. Эту постоянную можно назвать „инертной массой“, так как она является мерой „инертной сопротивляемости ускорению“. Электростатическая сила, действующая на частицу, есть произведение напряженности электрического поля, не зависящего от частицы, на заряд частицы, который является ее характеристикой. Точно так же гравитационная сила есть произведение „напряженности гравитационного поля“ [отрицательного градиента гравитационного потенциала (10.3)] на массу частицы. В том случае, когда масса играет роль „гравитационного заряда“, мы будем ее называть „гравитационной или тяжелой мас-

сой". Согласно ньютоновской теории гравитации инертная и гравитационная массы одного и того же тела всегда равны. Это положение по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, носит название принципа эквивалентности.

Вообще говоря, могло бы случиться, что „инертная" и „гравитационная" массы большинства тел только приблизительно равны, что это приближенное равенство случайно и что при точном измерении обе массы в действительности окажутся различными. К счастью, утверждаемое равенство инертной и гравитационной масс возможно подвергнуть очень точной проверке. Для этого достаточно показать равенство ускорений всех тел в одном и том же гравитационном поле.

Ускорения свободно падающих тел нельзя измерять непосредственно, так как невозможно с достаточной степенью точности измерять интервалы времени; поэтому необходимо прибегнуть к косвенным методам. Существует тип ускорения, „инерциальное ускорение", которое определенно не зависит от массы ускоряемого тела. Если относить движение тел к неинерциальной системе отсчета, возникают ускорения, обусловленные не действующими на тело силами, а ускорением выбранной системы отсчета относительно какой-либо инерциальной системы. В главе II эти „силы инерции" были исследованы в специальном случае, когда система отсчета вращается с постоянной угловой скоростью относительно инерциальной системы.

„Сила инерции" пропорциональна „инертной массе" тела. Поэтому, если на тело одновременно действуют и „силы инерции" и гравитационные силы, направление равнодействующей будет зависеть от отношения „инертной" массы тела к „гравитационной". Определение направления этой равнодействующей для различных тел является чувствительным критерием того, одинаково ли это отношение для всех испытуемых тел.

Необходимая экспериментальная установка создана самой природой: Земля, вращающаяся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью, является неинерциальной си-

стемой. На тело, покоящееся относительно Земли, действуют две силы: гравитационное притяжение Земли и „центробежная сила". Полное ускорение этого тела относительно Земли получается векторным сложением гравитационного и „центробежного" ускорений. Для точек, расположенных не на экваторе, эти две составляющие не параллельны, и направление равнодействующей является мерой отношения инертной массы к гравитационной.

Этвеш [1]) подвешивал на коромыслах крутильных весов две гири из различных материалов, но с одной и той же гравитационной массой. Если бы их инертные массы не были равны, результирующие силы, действующие на гири, были бы не параллельны, и весы получили бы крутильный момент. Отсутствие такого момента показывает, что отношение инертной массы к гравитационной одно и то же для различных материалов. Этот результат был получен с относительной точностью $10^{-8}$.

В специальной теории относительности было показано, что по крайней мере часть инертной массы тела обусловлена внутренней энергией. В радиоактивных веществах эта прибавка к полной массе значительна. Является ли эта часть „инертной массы" также и „гравитационной массой"? Ответ на этот вопрос был дан Саузернсом [2]), который повторил эксперимент Этвеша с радиоактивными веществами. Результат был тот же: „гравитационная масса" оказалась равной „инертной массе", хотя последняя в известной степени была обусловлена энергией связи. Принцип эквивалентности, таким образом, является основным свойством гравитационных сил.

**Предварительные соображения о релятивистской теории гравитации.** Прежде чем строить релятивистскую теорию гравитации, необходимо сформулировать ньютоновскую теорию таким образом, чтобы действие на расстоянии было исключено. Сделать это довольно легко.

---

[1]) Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn, **8**, 65 (1890).
[2]) Proc. Roy. Soc., **84A**, 325 (1910).

Гравитационное притяжение некоторого тела массы $m$ несколькими другими телами может быть представлено суммой „гравитационных потенциалов“ (10.3) этих тел; эта сумма дает потенциальную энергию $U_m$ выбранного тела, деленную на его массу $m$. Сила, действующая на тело, есть отрицательный градиент его потенциальной энергии:

$$\mathbf{f} = -m \operatorname{grad} G. \tag{10.5}$$

Гравитационный потенциал зависит от расположения остальных тел. Потенциал, создаваемый каждой точечной массой, дается (10.3). Вводя „гравитационную напряженность поля“

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} G, \tag{10.6}$$

мы видим, что, как и в электростатике, силовые линии гравитационного поля не начинаются и не кончаются вне масс, и что на массе $M$ кончается $4\pi\varkappa M$ силовых линий. Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi\varkappa\rho,$$

где $\rho$ — плотность массы. Потенциал $G$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} G \equiv \nabla^2 G = 4\pi\varkappa\rho. \tag{10.7}$$

Это уравнение, впервые полученное Пуассоном, является классическим уравнением гравитационного поля. Система уравнений (10.5) и (10.7) эквивалентна уравнениям ньютоновской теории, построенным на основе дальнодействия.

Уравнение Пуассона (10.7) не является лорентц-инвариантным. Всюду, где $\rho$ равно нулю, представляется разумным предположить, что трехмерный оператор Лапласа $\nabla^2$ должен быть заменен его четырехмерным аналогом, оператором

$$\eta^{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \, \partial x^\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2.$$

В присутствии материи нужно помнить, что плотность $\rho$ является не скаляром, а компонентой тензора $P^{\mu\nu}$. Мы стоим перед альтернативой: заменить $\rho$ лорентц-инвариант-

ным скаляром $\eta_{\mu\nu}P^{\mu\nu}$ или заменить нерелятивистский скаляр $G$ мировым тензором $G^{\mu\nu}$.

**Об инерциальных системах.** Пусть перед нами стоит задача нахождения инерциальной системы отсчета. Согласно определению, данному в главе II, инерциальной является такая система координат, в которой все тела, не подвергающиеся действию сил, не обладают ускорениями. Такое определение, однако, недостаточно, коль скоро прежде всего необходимо определить, действуют ли на данное тело силы. Согласно классической механике все (реальные) силы представляют собой взаимодействие тел друг с другом. Следовательно, тело, достаточно удаленное[1]) от других тел, не испытывает действия сил.

Этот критерий удовлетворителен с точки зрения классической механики. Но в теории относительности мы должны избегать концепций, связанных с конечными пространственными расстояниями. Такое понятие, как „достаточно далеко" не является лорентц-инвариантным. Определение инерциальной системы должно основываться на свойствах непосредственной окрестности наблюдателя.

Мы можем определить, является ли данная система инерциальной, если сумеем найти ускорения испытуемых тел, или, что то же, если мы знаем гравитационное и электромагнитное поле в их окрестности. Но существует только один метод измерения полей: измерение ускорений пробных тел. Получается порочный круг.

Вместе с тем существует глубокое различие между электромагнитным и гравитационным полями. Ничто не мешает нам выбрать в качестве пробных тел тела незаряженные и неполяризованные, тогда действие на них электромагнитного поля сведется к нулю. Действие гравитационного поля на пробное тело исключить, однако, нельзя, так как ускорение тела в гравитационном поле не зависит от его массы.

---

[1]) Строго говоря, „достаточно далеко" означает бесконечно далеко. Наше условие может таким образом соблюдаться только приближенно.

Действие гравитационного поля на тело не отличимо от „инерциальных ускорений". Как гравитационное, так и инерциальное ускорения не зависят от характеристик пробного тела. Поэтому невозможно отделить гравитационные ускорения от инерциальных и найти таким образом инерциальную систему.

В этом смысле эквивалентность гравитационного и инерциального полей является следствием равенства гравитационной и инертной масс. Эквивалентность гравитационного и инерциального полей как раз и послужила основанием для названия „принцип эквивалентности".

С этой точки зрения инерциальные системы не представляют собой особого класса систем координат; по существу нет никакой разницы между инерциальной системой отсчета в гравитационном поле и неинерциальной системой.

**„Лифт" Эйнштейна.** Для иллюстрации эквивалентности инерциальной и неинерциальной систем отсчета Эйнштейн привел в пример человека, помещающегося в кабине лифта. Пока лифт покоится, человек может одним из обычных методов определить напряженность гравитационного поля на поверхности земли, которая приблизительно равна 981 см/сек$^{-2}$. Он может это сделать, измеряя, скажем, время, в течение которого тело падает на пол с высоты 100 см. Напряженность гравитационного поля в этом случае равна

$$g = \frac{100 \times 2}{t^2}. \qquad (10.8)$$

Предположим, что человек в лифте не имеет возможности получать информацию извне. Вместо того чтобы сделать заключение, что он и кабина находятся в покое в гравитационном поле, он может рассуждать также следующим образом: „Все тела в кабине испытывают ускорение в 981 см/сек$^{-2}$, пока они не будут остановлены столкновением с другими телами или с полом кабины. Так как это ускорение не зависит от индивидуальных характеристик испытуемых тел, то непохоже, что ускорения соответствуют реальным силам, которые действуют на эти тела.

Вероятно, моя система отсчета (связанная с кабиной) не является инерциальной системой, а по каким-то мне неизвестным причинам движется вверх относительно инерциальной системы с ускорением в 981 см/сек$^{-2}$. Те тела внутри кабины, которые, хотя бы временно, не принуждены участвовать в этом ускоренном движении, подчиняются закону инерции и отстают от этого движения, пока не наталкиваются на пол кабины".

Представим себе теперь, что трос подъемника оборвался, и что кабина, не снабженная автоматически останавливающим приспособлением, свободно падает в гравитационном поле земли. Во время этого падения тела внутри кабины испытывают такое же ускорение, как и сама кабина, и поэтому не ускоряются относительно нее. Наблюдатель внутри кабины может это интерпретировать так, что ускорение кабины прекратилось и что его система отсчета стала инерциальной.

С другой стороны, можно рассмотреть и более фантастический „мысленный эксперимент". Пусть кабина помещена в область пространства, где нет гравитационного поля. Если кабину предоставить самой себе и если она не вращается вокруг оси, проходящей через ее центр инерции, она будет представлять собой инерциальную систему. Предположим теперь, что кто-то начинает тянуть с постоянной силой трос, прикрепленный к потолку кабины. Тогда кабина перестает быть инерциальной системой. Если тело внутри кабины не находится в контакте с другими телами, оно, подчиняясь закону инерции, будет отставать от ускоряющейся кабины, т. е. оно будет, так сказать, „падать" на пол. Человек в кабине может ошибиться и приписать ускорение испытуемых тел действию гравитационного поля.

**Принцип общей ковариантности.** Для того чтобы развить теорию гравитации, включающую в себя как составную часть и принцип эквивалентности, нужно отбросить представление о привилегированных инерциальных системах отсчета. Все системы отсчета одинаково пригодны для описания законов природы.

Как выразить в математической форме эту эквивалентность всех систем отсчета? Поскольку мы всегда представляем систему отсчета в виде системы координат, а инерциальную систему, в частности, в виде лорентцовой системы координат, очевидно, что в общем случае нельзя ограничиться преобразованием координат Лорентца. Линейное преобразование координат с произвольными коэфициентами недостаточно, так как переход от одной системы отсчета к другой, ускоренно движущейся относительно первой, не может быть представлен преобразованием координат, линейным относительно временной координаты.

История развития общей теории относительности показала, что для построения общей релятивистской теории гравитации необходимо рассмотреть группу всех непрерывных дифференцируемых преобразований координат с неисчезающим якобианом. Вот почему теория гравитации называется общей теорией относительности.

Во второй части главы V были рассмотрены некоторые свойства произвольного преобразования координат. В эвклидовом пространстве всегда возможно ввести криволинейную систему координат. Все операции векторного и тензорного анализа могут быть с одинаковым успехом выражены как в прямоугольной декартовой, так и в криволинейной системе координат. Однако при введении криволинейных координат и произвольных преобразований, чтобы сформулировать многочисленные тензорные соотношения, нужно еще ввести метрический тензор $g_{mn}$, компоненты которого являются функциями координат. При этом прямая линия, например, не может быть представлена более простым способом, чем при помощи дифференциальных уравнений (5.99). Хотя любые геометрические соотношения можно представить в криволинейных координатах и в эвклидовом пространстве, в последнем все же обычно бывает предпочтительнее пользоваться декартовыми координатами.

В эвклидовом пространстве использование декартовых систем координат и ортогональных преобразований позволяет развить тензорное исчисление с меньшим числом ба-

зисных элементов, чем в общем формализме. Поскольку метрический тензор вырождается в тензор $\delta_{ik}$, он не является уже независимым элементом геометрии. В римановом пространстве введение декартовой системы координат невозможно. В нем должен быть использован общий формализм, ковариантный относительно общего преобразования координат.

В теории гравитации мы сталкиваемся с подобной же ситуацией. Мы можем сформулировать специальную теорию относительности, пользуясь криволинейными системами координат и обобщенными преобразованиями в четырехмерном мире. Однако при этом возможно ввести такие системы координат, в которых компоненты метрического тензора принимают постоянные значения $\eta_{\mu\nu}$ и где коэфициенты аффинной связности обращаются в нуль. Формализм, ковариантный только по отношению к преобразованиям, переводящим некоторую систему координат этого типа в систему такого же типа, не требует введения ряда геометрических понятий, являющихся составной частью формализма, ковариантного по отношению к общему преобразованию координат. Системы координат, в которых компоненты метрического тензора имеют постоянные значения $\eta_{\mu\nu}$ являются инерциальными, а преобразования одних инерциальных систем координат в другие инерциальные же системы являются преобразованиями Лорентца.

Эквивалентность всех систем отсчета должна выражаться эквивалентностью всех систем координат. В гравитационном поле невозможно ввести привилегированную систему координат Лорентца. Всегда, когда введение лорентцовой системы координат невозможно, мы, расширяя терминологию главы V, будем называть четырехмерное пространство Минковского — р и м а н о в ы м.

В пространстве Римана компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ во всех системах отсчета являются не постоянными, а функциями координат. Если ограничиться преобразованиями Лорентца, формализм не упростится. Гипотеза, что геометрия физического пространства лучше всего представляется формализмом, ковариантным относительно общих

преобразований координат, и что ограничение менее общей группой преобразований не упростит формализма, называется принципом общей ковариантности. Он является математическим выражением принципа эквивалентности. Развитие теории гравитации, удовлетворяющей принципу общей ковариантности, дало теоретической физике теорию поля, наилучшую из всех до сих пор предложенных.

**Природа гравитационного поля.** Из принципа эквивалентности, казалось бы, можно заключить, что гравитационных полей вообще не существует, что они являются лишь проявлением „сил инерции". Однако каждый инстинктивно чувствует, что это не так.

Измеряя с большой точностью направление ускоряющей силы земли, человек в кабине лифта нашел бы, что силовые линии сходятся к центру земли. Это открытие не дало бы ему возможности отделить гравитационное поле от инерциального, но оно указало бы ему на то, что поле не полностью инерциально. В силу сходимости силовых линий не существует системы отсчета, в которой гравитационное поле исчезло бы всюду. Римановский характер пространства, т. е. невозможность введения лорентцовой системы координат, и выражает невозможность введения такой системы отсчета, которая всюду имела бы свойства инерциальной системы.

Если невозможно введение системы координат, в которой компоненты метрического тензора принимали бы постоянные, наперед заданные значения, то метрический тензор сам становится частью поля, и в этом случае должны существовать уравнения поля, ограничивающие и до некоторой степени определяющие функциональную зависимость $g_{\mu\nu}$ от четырех мировых координат.

Каков же физический смысл этого тензора поля $g_{\mu\nu}$? Рассмотрим область пространства, в которой гравитационное поле отсутствует. Если ввести неинерциальную систему координат, то относительно нее будут ускоряться свободные тела, несмотря на то, что они движутся вдоль прямой мировой линии. Если выразить закон инерции в произволь-

ной криволинейной системе координат, то согласно (5.99), уравнениями движения будут

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = -\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\} U^\iota U^\varkappa, \tag{10.9}$$

где $\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\}$ линейны относительно первых производных $g_{\mu\nu}$:

$$\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\iota\beta,\,\varkappa} + g_{\varkappa\beta,\,\iota} - g_{\iota\varkappa,\,\beta}). \tag{10.10}$$

Тензор $g_{\mu\nu}$ фигурирует здесь, как потенциал „инерциального поля". Поэтому разумно предположить, что в гравитационном поле компоненты $g_{\mu\nu}$ также являются потенциалами, определяющими ускорения свободных тел; другими словами, $g_{\mu\nu}$ являются потенциалами гравитационного поля. Эти гравитационные потенциалы должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, подобным четырехмерным уравнениям Лапласа и Пуассона. Ниже мы убедимся в том, что существует только один класс уравнений такого типа, ковариантный относительно общего преобразования координат.

Как бы то ни было, мы увидим, что пространства, с которыми имеет дело теория гравитации, не являются „квази-эвклидовыми", т. е. в них не могут быть введены инерциальные системы координат. Прежде чем продолжить изучение гравитационных полей, необходимо более подробно, чем это было сделано в главе V, изучить геометрию римановых пространств. В частности, необходимо найти математический критерий, определяющий, является ли пространство эвклидовым или нет.