Глава XI

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА-КРИСТОФФЕЛЯ

*

Характерные особенности римановых пространств. Согласно определению, данному в главе V, эвклидовыми пространствами называются такие пространства, в которых можно ввести декартовы координаты; все остальные пространства не являются эвклидовыми.

Даже если нам известно, что в некотором частном случае компоненты метрического тензора являются известными функциями координат в некоторой системе координат, все же и в этом случае немыслимо перебрать все возможные преобразования координат, чтобы выяснить, не приводит ли какое-либо из них к декартовой системе. Поэтому необходимо найти подходящий критерий, который всегда давал бы возможность определить, является ли пространство эвклидовым или же нет.

Неэвклидовы пространства, с которыми мы обычно имеем дело, представляют собой двумерные кривые поверхности, которые можно рассматривать как подпространства в обычном трехмерном пространстве. Казалось бы, что геометрические свойства этих подпространств нельзя рассматривать вне связи с пространством, в которое они вложены. В действительности же это не так, по крайней мере по отношению к вопросу об эвклидовости или неэвклидовости пространства. Выберем, например, в качестве поверхности плоский лист разграфленной бумаги. Линии на бумаге представляют декартову систему координат, так что эта плоскость без сомнения является эвклидовой поверхностью. Изменим теперь связь этой поверхности с трехмерным пространством, свертывая лист бумаги; линии на нем будут при этом попрежнему образовывать декартову систему координат. Как до, так и после свертывания бумаги рас-

стояние между двумя бесконечно близкими точками на листе определяется уравнением

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Иначе говоря, метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{11.1}$$

Более того, линии, образовавшиеся из прямых в результате свертывания, остаются кратчайшими линиями, которые можно провести между двумя точками, не выходя за пределы двумерного подпространства.

Эвклидов характер пространства зависит только от метрики. Необходимо, таким образом, найти метод, при помощи которого можно было бы отличить эвклидову метрику от неэвклидовой.

Интегрируемость аффинной связности. Чтобы найти такой метод, вернемся к понятию параллельного переноса вектора, введенному в главе V. Параллельный перенос вектора вдоль кривой при коэфициентах аффинной связности Γ^l_{ik} возможен единственным способом в соответствии со следующими дифференциальными законами:

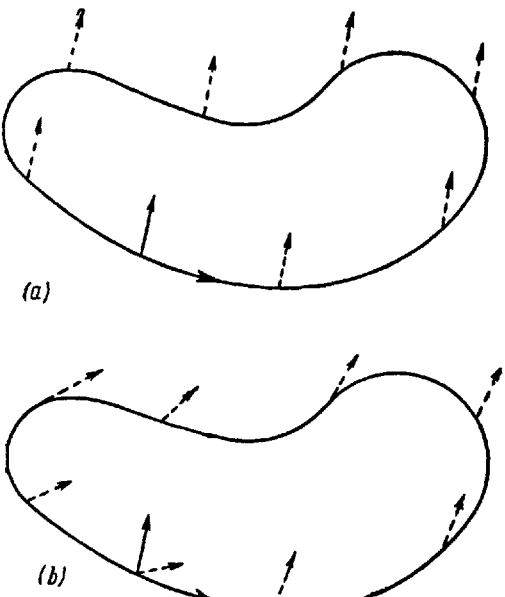
$$\left.\begin{aligned} \delta a^i &= -\Gamma^i_{ik} a^i \delta\xi^k, \\ \delta b_i &= +\Gamma^l_{ik} b_l \delta\xi^k. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Метрический тензор g_{ik} определяет частный вид аффинной связности $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$, где

$$\left\{ {l \atop i\ k} \right\} = \frac{1}{2} g^{ls} (g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}). \tag{11.3}$$

Если коэфициентами аффинной связности являются символы Кристоффеля, результат параллельного переноса вектора не зависит от того, применяются ли законы (11.2) к его ковариантным или контравариантным компонентам.

Будем параллельно переносить вектор вдоль замкнутой кривой (фиг. 9), пока не вернемся в исходную точку. При этом перенесенный вектор либо будет совпадать с исходным, либо будет от него отличаться. Если получается тот же самый вектор независимо от выбора исходного вектора



Фиг. 9. Интегрируемость аффинной связности. В (*a*) аффинная связность интегрируема, в (*b*) — нет.

и формы замкнутой кривой, аффинную связность называют **интегрируемой**. В этом случае говорят также о „дистанционном параллелизме"; это означает, что при параллельном переносе вектора из точки P_1 в точку P_2 составляющие полученного вектора не зависят от выбора кривой, связывающей эти точки. Если аффинная связность интегри-

руема, задание вектора в одной точке определяет полное поле параллельных векторов во всем пространстве.

Эвклидовость и интегрируемость. Если коэфициенты аффинной связности определяются метрическим тензором при помощи уравнений (11.3), можно показать, что эвклидовость пространства находится в непосредственной связи с интегрируемостью аффинной связности.

Если пространство эвклидово, можно ввести декартову систему координат, в которой компоненты метрического тензора постоянны:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{11.4}$$

Согласно уравнениям (11.3), в такой системе координат $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$ равны нулю, δa^l и δb_i, согласно (11.2), также обращаются в нуль. Параллельные векторы в этом случае имеют одинаковые составляющие во всех точках; такая аффинная связность является, конечно, интегрируемой. Интегрируемость по определению есть инвариантное свойство аффинной связности, не зависимое от выбора системы координат. Таким образом, аффинная связность эвклидова пространства всегда интегрируема.

С другой стороны, покажем непосредственным построением, что, если аффинная связность (11.3) интегрируема, всегда можно ввести декартову систему координат. Для того чтобы это положение было справедливо, требуется некоторое обобщение определения эвклидова пространства. До сих пор мы определяли эвклидово пространство, как такое пространство, в котором при помощи вещественного преобразования координат можно ввести систему координат с постоянными коэфициентами метрического тензора g_{ik}, равными δ_{ik}. Согласно такому определению четырехмерное пространство Минковского неэвклидово. Основное различие между эвклидовым пространством и пространством Минковского заключается в том, что в первом квадратичная форма дифференциалов координат положительно определена;

$$ds^2 = dx_i dx_i \geqslant 0 \tag{11.5}$$

при произвольных вещественных значениях dx_i. В пространстве Минковского с квадратичной формой

$$d\tau^2 = (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2}\, dx^i\, dx^i \tag{11.6}$$

$d\tau^2$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, соответственно чему интервал будет „пространственно-подобным“ или „временно-подобным“ (см. главу IV). В силу этого невозможно при помощи вещественного преобразования координат перейти от (11.5) к (11.6).

Формы (11.5) и (11.6) однако очень похожи друг на друга по своим аналитическим свойствам. В конце главы V указывалось, что символ $\left\{ {l \atop l\ k} \right\}$, соответствующий метрической форме (11.6), равен нулю: компоненты параллельно перенесенного вектора в этом случае постоянны, а параллельный перенос „интегрируем“. Вообще говоря, это справедливо всегда, когда в пространстве можно ввести систему координат, в которой компоненты метрического тензора постоянны. Такое пространство будем называть плоским. Плоские пространства представляют собой более общий класс по сравнению с эвклидовыми, так как в них метрика не должна быть обязательно положительно определена.

Имея в виду сказанное выше, можно утверждать, что *если параллельный перенос, определяемый уравнениями (11.2) и (11.3), интегрируем, пространство является плоским, другими словами, в этом случае существует система координат, в которой метрическая форма имеет вид:*

$$ds^2 = \sum_i \varepsilon_i dx^i dx^i, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \tag{11.7}$$

Доказательство проведем в две стадии. Если коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, в силу интегрируемости аффинной связности можно построить систему координат, в которой коэфициенты аффин-

ной связности равны нулю. Это обстоятельство не зависит от существования метрики и будет доказано без помощи уравнения (11.3). Далее, если метрика определена, обращение в нуль $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$ эквивалентно постоянству компонент метрического тензора.

Рассмотрим n линейно независимых ковариантных векторов $\overset{s}{b}_l$ в точке P (n — число измерений пространства). В силу линейной независимости они должны удовлетворять неравенству

$$\Delta \equiv \delta^{i_1 \ldots i_n} \overset{1}{b}_{i_1} \ldots \overset{n}{b}_{i_n} \neq 0, \tag{11.8}$$

где $\delta^{i_1 \ldots i_n}$ контравариантная тензорная плотность Леви-Чивита. Сместим теперь эти n векторов $\overset{s}{b}_l$ вдоль одного и того же отрезка пути. Изменение Δ будет равно

$$\left.\begin{aligned} \delta\Delta &= \delta^{i_1 \ldots i_n} [\Gamma^k_{i_1 s} \overset{1}{b}_k \overset{2}{b}_{i_2} \ldots \overset{n}{b}_{i_n} + \ldots + \Gamma^k_{i_n s} \overset{1}{b}_{i_1} \ldots \overset{n}{b}_k] \delta\xi^s = \\ &= \overset{1}{b}_{i_1} \ldots \overset{n}{b}_{i_n} [\delta^{k i_2 \ldots i_n} \Gamma^{i_1}_{ks} + \ldots + \delta^{i_1 \ldots k} \Gamma^{i_n}_{ks}] \delta\xi^s. \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

Это выражение можно значительно упростить. Прежде всего, скобки справа антисимметричны во всех индексах $i_1 \ldots i_n$. Так, например, если поменять местами i_1 и i_2, скобки переходят в

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{k i_1 \ldots i_n} \Gamma^{i_2}_{ks} + \delta^{i_2 k \ldots i_n} \Gamma^{i_1}_{ks} + \ldots + \delta^{i_2 i_1 \ldots k} \Gamma^{i_n}_{ks} = \\ &= -[\delta^{i_1 k \ldots i_n} \Gamma^{i_2}_{ks} + \delta^{k i_2 \ldots i_n} \Gamma^{i_1}_{ks} + \ldots + \delta^{i_1 i_2 \ldots k} \Gamma^{i_n}_{ks}]. \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

Далее, k может принимать только те же значения, что и смещенные индексы i_s, так как для всех остальных значений компоненты тензорной плотности Леви-Чевита обращаются в нуль. Поэтому квадратные скобки в уравнении (11.9) можно заменить выражением

$$\delta^{k i_2 \ldots i_n} \Gamma^{i_1}_{ks} + \ldots + \delta^{i_1 \ldots k} \Gamma^{i_n}_{ks} = \delta^{i_1 \ldots i_n} \Gamma^k_{ks}, \tag{11.11}$$

а само уравнение (11.9) перейдет в

$$\delta\Delta = \Delta \cdot \Gamma^k_{ks} \cdot \delta\xi^s. \tag{11.9a}$$

Вдоль произвольного пути Δ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка. Поэтому Δ не может обращаться в нуль в какой-либо точке этого пути, если оно неравно нулю тождественно.

Отсюда заключаем, что, если n векторов $\overset{s}{b}_i$ линейно независимы, они сохраняют это свойство и при параллельном переносе.

Предположим теперь, что аффинная связность симметрична в своих индексах и интегрируема, тогда каждый из векторов $\overset{s}{b}_i$ образует поле параллельных векторов. Каждое из этих полей удовлетворяет дифференциальным уравнениям вида

$$\overset{s}{b}_{i,k} = \Gamma'_{ik} \overset{s}{b}_l. \tag{11.12}$$

Правая часть симметрична в индексах i и k. Поэтому ротор $\overset{s}{b}_i$ равен нулю:

$$\overset{s}{b}_{i,k} - \overset{s}{b}_{k,i} = 0. \tag{11.13}$$

Из этого уравнения видно, что каждое из n полей $\overset{s}{b}_i$ является градиентным полем, т. е. существует n скаляров $\overset{s}{b}$, так что

$$\overset{s}{b}_i = \overset{s}{b}_{,i}. \tag{11.14}$$

Эти n скаляров $\overset{s}{b}$ можно рассматривать, как n координат новой системы. Согласно уравнению (11.8) якобиан преобразования координат не равен нулю. Теперь можно показать, что в новой системе координат Γ^l_{ik} исчезают

Преобразуем коэфициенты аффинной связности согласно уравнению (5.81):

$$\Gamma^{*l}_{ik} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{*l}} \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^{*k}} \left(\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma^c_{ab} - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \right). \qquad (11.15)$$

В соответствии с уравнениями (11.14) производные $\partial \xi^{*l} / \partial \xi^c$ являются компонентами векторов $\overset{l}{b}_c$, так что выражение в скобках в (11.15) равно

$$\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma^c_{ab} - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} = \overset{l}{b}_c \Gamma^c_{ab} - \overset{l}{b}_{a,b}. \qquad (11.16)$$

В силу (11.12) это выражение равно нулю, благодаря этому Γ^{*l}_{ik} в (11.15) также обращаются в нуль.

Возвратимся к рассмотрению метрического тензора. Уравнение (11.3) можно решить относительно производных g_{mn}. Сложим два уравнения:

$$\frac{1}{2} (g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) = \left\{ {s \atop k\,l} \right\} g_{si}$$

и

$$\frac{1}{2} (g_{kl,i} + g_{ki,l} - g_{il,k}) = \left\{ {s \atop i\,l} \right\} g_{sk}. \qquad (11.17)$$

Получим:

$$g_{ik,l} = \left\{ {s \atop k\,l} \right\} g_{si} + \left\{ {s \atop i\,l} \right\} g_{sk}. \qquad (11.18)$$

Таким образом, если $\left\{ {s \atop k\,l} \right\}$ равны нулю, g_{ik} постоянны.

Приведение постоянных g_{ik} к форме (11.7) есть чисто алгебраическая задача. Она решается при помощи стандартных процессов ортогонализации и нормировки и не представляет для нас интереса. Любое пространство, в котором компоненты метрического тензора постоянны, является тем самым плоским.

Критерий интегрируемости. Если аффинная связность пространства симметрична и интегрируема, уравнения параллельного переноса (11.2) могут рассматриваться не

только как обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль заданного пути, но и как уравнения в частных производных для векторного поля в целом. Их можно записать в виде

$$a^n{}_{,l} = -\Gamma^n_{sl} a^s. \tag{11.19}$$

Аналогичные уравнения имеют место для ковариантных векторных полей. Эти уравнения переопределены, так как для определения n составляющих вектора имеется n^2 уравнений. Для того чтобы существовали решения, должен удовлетворяться ряд дифференциальных тождеств. Вид этих тождеств хорошо известен. Дифференцируя уравнения (11.19) по ξ^k, получим:

$$a^n{}_{,ik} = -\Gamma^n_{sl,k} a^s - \Gamma^n_{sl} a^s{}_{,k} = (-\Gamma^n_{ll,k} + \Gamma^n_{sl}\Gamma^s_{lk})\, a^l. \tag{11.20}$$

Вычитая отсюда такое же выражение с переставленными индексами i и k, найдем условия, которые должны удовлетворяться в силу того, что порядок дифференцирования не играет роли:

$$0 = -(\Gamma^n_{ll,k} - \Gamma^n_{lk,l} - \Gamma^n_{sl}\Gamma^s_{lk} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{il})\, a^l. \tag{11.21}$$

Так как значения a^l в одной точке можно выбрать произвольно, окончательные условия интегрируемости имеют вид:

$$R_{ikl}{}^n \equiv \Gamma^n_{il,k} - \Gamma^n_{lk,i} - \Gamma^n_{sl}\Gamma^s_{ik} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{il} = 0. \tag{11.22}$$

Эти условия не только необходимы, но и достаточны. Доказательство этого проводится таким же путем, как и доказательство теоремы о том, что ковариантное векторное поле является градиентным полем тогда и только тогда, когда ротор обращается в нуль (см. задачу 14, главы V).

Перестановочные соотношения для ковариантного дифференцирования, тензорный характер $R_{ikl}{}^n$. Обращение в нуль выражения $R_{ikl}{}^n$ в уравнении (11.22) эквивалентно интегрируемости аффинной связности и поэтому

должно быть инвариантным свойством. Однако существуют пространства, не являющиеся плоскими и в которых $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ отлично от нуля (например, поверхность сферы). Выясним, по каким законам преобразуются величины $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$.

Чтобы ответить на этот вопрос, найдем тензорные уравнения, в которых фигурируют $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$. Таковыми являются перестановочные соотношения для ковариантного дифференцирования. Вычислим величину

$$A^n{}_{;ik} - A^n{}_{;kl}.$$

Согласно определению ковариантного дифференцирования имеем

$$A^n{}_{;i} = A^n{}_{,i} + \Gamma^n_{li} A^l. \tag{11.23}$$

Вторичное ковариантное дифференцирование приводит к выражению

$$\left.\begin{aligned} A^n{}_{;ik} &= (A^n{}_{;i})_{,k} + \Gamma^n_{sk} A^s{}_{;i} - \Gamma^s_{ik} A^n{}_{;s} = \\ &= \underline{A^n{}_{,ik}} + \Gamma^n_{li,\,k} A^l + \underline{\Gamma^n_{li} A^l{}_{,k}} + \underline{\Gamma^n_{sk} A^s{}_{,i}} + \\ &\quad + \Gamma^n_{sk} \Gamma^s_{li} A^l - \underline{\Gamma^s_{ik} A^n{}_{,s}} - \underline{\Gamma^s_{ik} \Gamma^n_{ls} A^l}. \end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

Предположим, что коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах. После вычитания из (11.24) уравнения с переставленными i и k подчеркнутые члены уничтожаются в силу их симметрии относительно i и k. В результате получаем соотношение

$$A^n_{;ik} - A^n_{;ki} = R_{ikl.}^{\ \ \ n} A^l. \tag{11.25}$$

Это уравнение является перестановочным соотношением для ковариантного дифференцирования. В плоском пространстве ковариантное дифференцирование коммутативно, подобно обычному дифференцированию. Это можно было предвидеть, так как в плоском пространстве существуют системы координат, в которых ковариантное и обыкновенное дифференцирования эквивалентны.

Если пространство не является плоским, коммутатор зависит только от непродифференцированного вектора.

Перестановочное соотношение для ковариантного дифференцирования ковариантных векторов имеет вид:

$$A_{l;\,ik} - A_{l;\,ki} = -R_{ikl.}^{\;\;\;n} A_n. \qquad (11.26)$$

Левые части в (11.25) и (11.26) преобразуются как тензоры. Следовательно, правые их части тоже являются тензорами. Из произвольности множителей A^l и A_n следует, что $R_{ikl.}^{\;\;\;n}$ сами являются компонентами тензора. Тензор

$$R_{ikl.}^{\;\;\;n} = \Gamma^n_{il,\,k} - \Gamma^n_{ik,\,l} - \Gamma^n_{sl}\Gamma^s_{ik} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{il} \qquad (11.27)$$

называется тензором кривизны (тензором Римана-Кристоффеля)[1].

Свойства тензора кривизны. Тензор кривизны определяется аффинной связностью. Однако некоторыми свойствами симметрии он обладает только при том условии, что коэфициентами аффинной связности являются символы Кристоффеля (11.3), определяемые метрикой. Рассмотрим сначала те свойства тензора кривизны, которые не зависят от связи Γ^l_{ik} с метрикой.

1) Тензор $R_{ikl.}^{\;\;\;n}$ антисимметричен относительно индексов i и k

$$R_{ikl.}^{\;\;\;n} + R_{kil.}^{\;\;\;n} = 0. \qquad (11.28)$$

Выражение (11.27) удовлетворяет этому соотношению независимо от свойств симметрии Γ^l_{ik}.

---

[1] В этой книге приняты индексные обозначения Леви-Чивита. К сожалению, не существует общепринятого правила написания индексов в тензоре кривизны. Многие авторы пишут наш последний индекс на первом месте, наш третий индекс — на втором, а наши первый и второй индексы — соответственно, на третьем и четвертом местах. В дальнейшем мы строго будем придерживаться обозначений, соответствующих (11.27).

Если коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, тензор кривизны обладает еще одним свойством симметрии и, кроме того, удовлетворяет ряду дифференциальных тождеств.

2) Сумма компонент тензора кривизны, получающихся при циклической перестановке первых трех индексов, равна нулю

$$R_{ikl.}^{\ \ \ n} + R_{kli.}^{\ \ \ n} + R_{lik.}^{\ \ \ n} = 0. \qquad (11.29)$$

Доказательство производится непосредственным вычислением выражения (11.29).

3) Получим дифференциальные тождества следующим образом. Ковариантно продифференцируем соотношения (11.26) по новым координатам

$$A_{s;\,ikl} - A_{s;\,kil} = -R_{iks.\,;l}^{\ \ \ \ n} A_n - R_{iks.}^{\ \ \ n} A_{n;\,l}, \qquad (11.30)$$

произведем циклическую перестановку индексов i, k, l и сложим. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}(A_{s;\,ikl} - A_{s;\,ilk}) + (A_{s;\,kil} - A_{s;\,kli}) + (A_{s;\,lik} - A_{s;\,lki}) = \\ = -A_n (R_{iks.\,;l}^{\ \ \ \ n} + R_{kls.\,;i}^{\ \ \ \ n} + R_{lis.\,;k}^{\ \ \ \ n}) - \\ - (R_{iks.}^{\ \ \ n} A_{n;\,l} + R_{kls.}^{\ \ \ n} A_{n;\,i} + R_{lis.}^{\ \ \ n} A_{n;\,k}).\end{aligned}\right\} \qquad (11.31)$$

Все скобки слева представляют собой левые части перестановочных соотношений для ковариантного дифференцирования. Как легко показать, эти перестановочные соотношения для ковариантного тензора второго ранга имеют вид:

$$B_{lm;\,ik} - B_{lm;\,ki} = -R_{ikl.}^{\ \ \ n} B_{nm} - R_{ikm.}^{\ \ \ n} B_{ln}. \qquad (11.32)$$

Применяя этот закон ко всем скобкам в левой части (11.31), получим, например, для первых из них:

$$A_{s;\,ikl} - A_{s;\,ilk} = -R_{kls.}^{\ \ \ n} A_{n;\,i} - R_{kli.}^{\ \ \ n} A_{s;\,n}. \qquad (11.33)$$

При подстановке этого выражения в (11.31) первый член правой части (11.33) сократится со вторым членом послед-

них скобок правой части (11.31). В силу (11.29) второй член в правой части (11.33) сокращается совместно с членами, получаемыми из только что указанного путем циклической перестановки.

В результате получаем:

$$A_n (R_{iks.\ ;l}^{\ \ \ \ n} + R_{kls.\ ;i}^{\ \ \ \ n} + R_{lis.\ ;k}^{\ \ \ \ n}) \equiv 0. \qquad (11.34)$$

Вектор A_n здесь произволен, поэтому тензор кривизны должен удовлетворять следующим тождествам:

$$R_{iks.;\ l}^{\ \ \ \ n} + R_{kls.\ ;i}^{\ \ \ \ n} + R_{lis.\ ;k}^{\ \ \ \ n} \equiv 0, \qquad (11.35)$$

которые называются тождествами Бьянки.

Ковариантная форма тензора кривизны. До сих пор мы не вводили метрики. Если метрика определена и Γ_{ik}^{l} связаны с нею уравнениями (11.3), тензор кривизны удовлетворяет еще дополнительным алгебраическим тождествам. Полностью ковариантный тензор кривизны получается опусканием индекса n в уравнении (11.27):

$$R_{iklm} = R_{ikl.}^{\ \ \ n} g_{mn}. \qquad (11.36)$$

Этот ковариантный тензор кривизны может быть выражен через „символы Кристоффеля первого рода", которые получаются из коэфициентов аффинной связности $\left\{ {s \atop ik} \right\}$ умножением на g_{ls}:

$$[ik, l] = g_{ls} \left\{ {s \atop ik} \right\} = \frac{1}{2} (g_{kl,\ i} + g_{il,\ k} - g_{ik,\ l}). \qquad (11.37)$$

Первый член в R_{iklm} может быть записан в виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{mn} \left\{ {n \atop li} \right\}_{,k} &= [li, m]_{,k} - \left\{ {n \atop li} \right\} g_{mn,\ k} = \\ &= [li, m]_{,k} - \left\{ {n \atop li} \right\} ([nk, m] + [mk, n]). \end{aligned} \right\} \qquad (11.38)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (11.36), получим

$$\begin{aligned} R_{iklm} = [li, m]_{,k} - [lk, m]_{,\ l} + g^{rs} ([mi, r]\,[lk, s] - \\ - [mk, s]\,[li, r]). \end{aligned} \qquad (11.39)$$

Записав ковариантный тензор кривизны в таком виде, можно убедиться в том, что к тождествам (1) и (2) можно добавить еще два алгебраических тождества.

4) Ковариантный тензор кривизны антисимметричен в своих последних двух индексах:

$$R_{iklm} + R_{ikml} \equiv 0. \tag{11.40}$$

Действительно, скобки в (11.39), очевидно, антисимметричны по отношению к m и l. Первые же два члена содержат только следующую комбинацию вторых производных компонент метрического тензора

$$[li, m]_{,k} - [lk, m]_{,i} = \frac{1}{2}[(g_{mi,lk} - g_{li,mk}) + (g_{lk,mi} - g_{mk,li})].$$

Это выражение также антисимметрично по отношению к m и l.

5) Ковариантный тензор кривизны симметричен относительно перестановки обеих его пар индексов:

$$R_{iklm} \equiv R_{lmik}. \tag{11.41}$$

Это соотношение проверяется так же, как (11.40).

В оставшейся части этой главы мы будем рассматривать только метрические пространства, коэфициенты аффинной связности которого определяются формулой (11.3).

Свертывание тензора кривизны. При помощи свертывания из тензора кривизны можно получить тензоры более низкого ранга, а именно, следующие тензоры: $R_{ikl.}^{\ \ \ i}$, $R_{ikl.}^{\ \ \ k}$, $R_{ikl.}^{\ \ \ *}\, g^{il}$, $R_{ikl.}^{\ \ \ n}\, g^{kl}$; все остальные свернутые тензоры равны нулю в силу антисимметрии R_{iklm} относительно индексов (i, k) и (l, m).

Приведенные выше четыре тензора второго ранга равны между собой с точностью до знака, так как они получаются один из другого перестановкой индексов в одной из пар или перестановкой самих пар индексов. Свернутый тензор $R_{ikl.}^{\ \ \ i}$ принято обозначать через R_{kl}. В силу свойств симметрии $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ тензор R_{kl} симметричен в своих индексах.

Свертывая, далее, R_{kl}, получим так называемую скалярную кривизну R:

$$R = g^{kl} R_{kl}, \quad R_{kl} = R_{ikl.}^{\ \ \ i} . \tag{11.42}$$

R_{kl} выражается через символы Кристоффеля следующим образом:

$$R_{kl} = \begin{Bmatrix} s \\ ls \end{Bmatrix}_{,k} - \begin{Bmatrix} s \\ lk \end{Bmatrix}_{,s} - \begin{Bmatrix} r \\ sr \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ lk \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s \\ rk \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ ls \end{Bmatrix}. \tag{11.43}$$

Симметрия относительно индексов k и l очевидна во всех членах, кроме первого. Выражение $\begin{Bmatrix} s \\ ls \end{Bmatrix}$, из которого получается первый член, может быть представлено в виде

$$\begin{Bmatrix} s \\ ls \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{rs} (g_{rl,s} + g_{rs,l} - g_{ls,r}).$$

Разность $g_{rl,s} - g_{ls,r}$ антисимметрична относительно r и s и после умножения на g^{rs} обращается в нуль. В скобках остается только второй член:

$$\begin{Bmatrix} s \\ ls \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{rs} g_{rs,l} = \frac{1}{2} \frac{g_{,l}}{g} = (\log \sqrt{g})_{,l}, \quad g = |g_{ab}| \tag{11.44}$$

Первый член в (11.43) поэтому равен

$$\begin{Bmatrix} s \\ ls \end{Bmatrix}_{,k} = (\log \sqrt{g})_{,lk}, \tag{11.45}$$

и тоже симметричен в l и k.

Свернутые тождества Бьянки. Дважды свертывая тождества Бьянки (11.35), получим тождества, содержащие только свернутый тензор кривизны. Свернем сначала (11.35) по i и n:

$$R_{ks;l} + R_{kls.;r}^{\ \ \ \ \ r} + R_{lrs.;k}^{\ \ \ \ \ r} \equiv 0.$$

Меняя в последнем члене местами индексы l и r, в силу (11.28) получим:

$$R_{ks;l} + R_{kls.;r}^{\ \ \ \ \ r} - R_{ls;k} \equiv 0,$$

или

$$R_{k.;l}^{s} + R_{kl..;r}^{sr} - R_{l.;k}^{s} \equiv 0.$$

Далее, переставим контравариантные индексы s и r во втором члене

$$R_{kl..}^{sr} = -R_{kl..}^{rs},$$

и свернем по индексам k и s. Тогда

$$R_{;l} - 2R_{l.;r}^{r} \equiv 0,$$

или

$$\left(R^{ls} - \frac{1}{2} g^{ls} R\right)_{;s} \equiv 0. \tag{11.46}$$

Выражение в скобках обычно обозначают через G^{ls}:

$$G^{ls} = R^{ls} - \frac{1}{2} g^{ls} R. \tag{11.47}$$

Число алгебраически независимых компонент тензора кривизны. Компоненты ковариантного тензора кривизны R_{iklm} удовлетворяют алгебраическим соотношениям (11.28), (11.29) (в обеих этих формулах индекс n предполагается опущенным), (11.40) и (11.41). Поэтому количество алгебраически независимых его компонент уменьшается. В этом разделе мы покажем, что их число в n-мерном пространстве равно

$$N = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1). \tag{11.48}$$

В двумерном пространстве тензор кривизны имеет только одну отличную от нуля компоненту: одного скаляра R уже достаточно, чтобы полностью охарактеризовать кривизну [1]. В трехмерном пространстве существует шесть алгебраически независимых компонент тензора кривизны. Такое же количество независимых компонент имеет и свернутый тензор R_{kl}, в

---

[1] Можно показать, что в двумерном пространстве тензор кривизны следующим образом зависит от R:

$$R_{ikl.}^{n} = \frac{1}{2} (\delta_i^n g_{kl} - \delta_k^n g_{il}) R.$$

этом случае им полностью определяется тензор кривизны[1]. В четырехмерном пространстве N равно 20, в то время как свернутый тензор кривизны имеет только 10 независимых компонент. Кривизна пространства, число измерений которого меньше четырех, полностью определяется свернутым тензором кривизны R_{kl}.

Перейдем к выводу формулы (11.48). Разделим компоненты $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ на три группы: к первой группе отнесем компоненты, у которых индексы во второй паре имеют те же значения, что и индексы в первой паре, например R_{1212}; ко второй — компоненты, в которых только один индекс встречается дважды, например R_{1213}; наконец, в последнюю группу войдут компоненты, у которых все четыре индекса различны, например R_{1234}.

В первой группе, где различны только два индекса, первые и вторые индексы пар должны быть одинаковыми, так как в силу уравнений (11.28) и (11.40) два индекса одной пары не могут равняться друг другу. Эти компоненты имеют вид R_{ikik} (помнить: здесь одинаковые индексы не знак суммы). R_{ikki} отличается от R_{ikik} только знаком. Количество компонент такого типа равно числу пар (i, k) при $i \neq k$.

Индекс i может принимать n различных значений. Так как $k \neq i$, при заданном i, k может принимать только $n-1$ различных значений. Ввиду того что последовательность i и k безразлична, произведение $n(n-1)$ нужно разделить на 2. Отсюда число различных пар (i, k) $(i \neq k)$ равно

$$N_p = \frac{1}{2} n (n-1), \tag{11.49}$$

---

[1]) В трехмерном пространстве $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ выражается через R_{kl} следующим образом:

$$R_{ikl.}^{\ \ \ n} = \delta_i^n R_{kl} - \delta_k^n R_{il} + g_{kl} R_{i.}^{\ n} -$$
$$- g_{il} R_{k.}^{\ n} - \frac{1}{2} (\delta_i^n g_{kl} - \delta_k^n g_{il}) R.$$

и количество алгебраически независимых компонент с двумя индексами будет также

$$N_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} n (n - 1). \tag{11.50}$$

Циклические тождества (11.29) не уменьшают этого числа, так как они будут независимы от других алгебраических тождеств, только если все четыре индекса различны. Действительно, если два из четырех индексов i, k, l, m равны, (11.29) приводятся к одной из следующих форм:

$$R_{ikli} + \langle R_{klii} \rangle + R_{liki} = 0,$$

или

$$R_{iklm} + R_{klim} + \langle R_{likm} \rangle = 0 \text{ [1]}.$$

Эти уравнения являются следствием уравнений (11.28), (11.40) и (11.41).

Рассмотрим теперь вторую группу компонент, которые имеют по три различных индекса. Применением (11.28) и (11.40) все эти компоненты могут быть приведены к форме R_{iklm}. Значение i может быть выбрано n способами. Из оставшихся $(n - 1)$ чисел нужно выбирать пары различных чисел для k и m. Согласно (11.49) это можно сделать $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ способами. Соответственно этому число алгебраически независимых компонент второго типа равно

$$N_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2} n (n - 1)(n - 2). \tag{11.51}$$

Циклические тождества и в этом случае не уменьшают их числа.

В компонентах третьей группы все четыре индекса различны. Поэтому первую пару индексов можно выбрать $\frac{1}{2} n (n - 1)$ различными способами. Из оставшихся $(n - 2)$

---

[1] Скобками $\langle\rangle$ выделены члены, тождественно равные нулю в силу того, что у них одинаковы индексы одной пары [см. (11.28) и (11.40)].

чисел вторую пару индексов можно выбрать $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ различными способами. Согласно (11.41), последовательность обеих пар безразлична, поэтому результат нужно еще разделить на 2. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

способов выбора двух совершенно различных пар индексов.

Однако в этом случае число алгебраически независимых компонент уменьшается еще и за счет существования тождеств (11.29). Например, каждая из трех компонент R_{1234}, R_{2314} и R_{3124} имеет различную комбинацию пар индексов, но любая из них может быть выражена через две других. Число алгебраически независимых компонент R_{iklm} с четырьмя различными индексами поэтому равно

$$N_{\text{III}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-3)=$$
$$=\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \qquad (11.52)$$

Полное число алгебраически независимых компонент R_{iklm} получается суммированием N_{I}, N_{II} и N_{III}, что приводит к (11.48).