Глава XII

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Уравнение движения в гравитационном поле. В этой главе мы выведем уравнения гравитационного поля и уравнения движения масс в этом поле.

К сожалению, мы не можем пока рассматривать уравнения движения со всей полнотой, мы должны сейчас ограничиться рассмотрением движения малых частиц, наличие которых лишь незначительно сказывается на общем поле.

Принцип эквивалентности определяет законы движения таких частиц. Их движение в гравитационном поле не должно ничем отличаться от движения по инерции, т. е. их траекториями должны быть геодезические мировые линии:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} \frac{d\xi^\rho}{d\tau}\frac{d\xi^\sigma}{d\tau}, \quad d\tau^2 = g_{\rho\sigma}\, d\xi^\rho\, d\xi^\sigma. \quad (12.1)$$

Этот закон движения более сложен, чем, например, закон движения электрических зарядов в специальной теории относительности. В то время как уравнение (7.49) линейно относительно напряженностей поля, уравнение (12.1) не является линейным по отношению к $g_{\mu\nu}$ и их производным. Эта нелинейность характерна для уравнений, ковариантных относительно общих преобразований координат; она является поэтому следствием принципа эквивалентности.

Представление материи в уравнениях поля. Прежде чем приступить к нахождению дифференциальных уравнений гравитационного поля, остановимся кратко на представлении гравитационной массы в уравнениях и их решениях.

Гравитационное поле создается гравитационными массами, так же как электромагнитное поле создается электрическими зарядами. Эти заряды могут рассматриваться в двух совершенно различных аспектах. Когда Максвелл получил свои уравнения поля, еще не был известен атомистический характер электрических зарядов. Максвелл предполагал, что заряд равномерно распределяется по объему заряженного диэлектрика, по поверхности проводника и т. п. Соответственно этому он ввел понятия плотности заряда и плотности тока. Эти четыре плотности представляются нашим мировым вектором I^{ρ}, который входит в систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Аналогичным образом можно составить уравнения поля, в которых гравитационная масса представляется мировым тензором $P^{\mu\nu}$, тензором энергии-импульса. Десять компонент этого тензора $P^{\mu\nu}$ должны быть равны десяти дифференциальным выражениям второго порядка, образованным из компонент метрического тензора. Эти десять выражений должны, конечно, преобразовываться как $P^{\mu\nu}$, т. е. как компоненты симметричного тензора второго ранга. Только в этом случае уравнения поля будут ковариантны.

После того как физиками была обнаружена атомистическая структура электрического заряда, т. е. выяснено, что носителями заряда обязательно являются отдельные частицы — электроны и ионы (а теперь можно добавить — и мезоны), Лорентц описал электромагнитные свойства материи при помощи новой модели. С его точки зрения в подавляющей части пространства не содержится электрических зарядов. Электрические заряды он рассматривал, как точечные, представляющие собой особые (сингулярные) точки электромагнитного поля. Вне зарядов электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла для свободного от зарядов пространства. В месте нахождения каждого точечного заряда уравнения не удовлетворяются — такая точка является особой точкой поля. Хотя уравнения поля теряют смысл в некоторых точках, все же благодаря тому, что уравнения поля справедливы в окрестностях каждой такой сингулярной области, содержащей особую

точку, величина заряда в этой сингулярной области остается неизмененной. Полный заряд внутри замкнутой поверхности, окружающей особую точку, определяется интегралом

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}),$$

а его изменение во времени равно

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Если уравнения поля удовлетворяются на всей поверхности S (т. е. если через поверхность S не течет электрический ток), то согласно формуле (7.4), правая часть которой предполагается равной нулю, можно заменить $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ через $c \operatorname{rot} \mathbf{H}$. Но по теореме Стокса интеграл по замкнутой поверхности от rot равен нулю; отсюда убеждаемся, что ε не меняется с течением времени, даже если не делать никаких предположений относительно поля внутри поверхности.

Несмотря на предположение о наличии особых областей, поле вне этих областей остается строго определенным. Благодаря этому Лорентц сумел показать, что старая теория Максвелла, предполагающая непрерывное распределение зарядов и токов, является апроксимацией его собственной теории, в которой заряды рассматриваются, как особые точки поля.

Мы можем использовать указанную точку зрения Лорентца для представления материи в теории гравитации. Вместо того чтобы представлять материю при помощи тензора энергии-импульса $P^{\mu\nu}$, предположим, что гравитационная масса заключена в небольших областях пространства, в остальном совершенно свободного от гравитационной материи. Дифференциальные уравнения гравитационного поля будут справедливы только вне областей нахождения массы: это будут уравнения поля в пустом пространстве.

Области, в которых сосредоточена масса, т. е. „точечные массы", будут являться сингулярными областями поля.

Представление материи с помощью тензора поля $P^{\mu\nu}$ можно рассматривать, как усреднение по большому числу точечных масс и их состояниям движения, точно так же как понятие плотности электрического заряда может рассматриваться как среднее число элементарных зарядов на единицу объема. С другой стороны, описание материи при помощи точечных масс также может быть использовано в качестве удобной апроксимации в том случае, когда компоненты тензора $P^{\mu\nu}$ отличны от нуля только в небольших изолированных областях пространства. Это имеет место, например, в солнечной системе, где материя сконцентрирована главным образом внутри небесных тел, тогда как вне этих областей все компоненты $P^{\mu\nu}$ равны нулю. Каждая из этих областей может быть заменена точечной массой, благодаря чему рассмотрение всей системы сильно упрощается.

Оба представления материи — при помощи точечных масс или как сплошной среды — оказываются недостаточными при более строгом подходе, так как ни одно из них не является удовлетворительным при рассмотрении квантовых эффектов атомной физики. В обычной же области применения теории гравитации — астрономии — встречаются примеры использования обоих представлений. При определении внутренних напряжений в звезде или при описании поведения целой туманности, содержащей миллионы отдельных звезд, материю можно рассматривать как сплошную среду. С другой стороны, если стоит задача описания движения небольшого числа небесных тел, например тел, составляющих солнечную систему, материя может считаться состоящей из отдельных точечных масс.

Независимо от того, рассматривается ли материя как сплошная среда или как отдельные точечные массы, мы предположим, что число уравнений поля равно числу переменных поля, т. е. десяти. Кроме того, эти уравнения должны быть дифференциальными уравнениями второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$, так как они должны содержать

неоднородности напряженности гравитационного поля[1]); кроме того, они должны быть ковариантны относительно общих преобразований координат.

Если рассматривать материю как сплошную среду, тензорное поле $P^{\mu\nu}$ должно всюду быть приравнено к некоторому тензорному полю (которое еще необходимо найти), содержащему дифференциальные выражения второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$. С другой стороны, если материю представлять в виде точечных масс, те же самые дифференциальные выражения должны обращаться в нуль всюду, кроме некоторых изолированных областей, в которых находятся точечные массы. В этих областях решения уравнений поля имеют особенность.

Дифференциальные тождества. Такой физический закон, как уравнения гравитационного поля, не может быть получен путем чисто логических рассуждений. Однако класс возможных уравнений поля уже ограничен нашими требованиями того, что поле должно представляться десятью дифференциальными уравнениями второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$, ковариантными по отношению к общему преобразованию координат. В этом разделе мы наложим на уравнения поля дополнительное условие, которое исключит все возможности, кроме одной.

Десять дифференциальных уравнений для $g_{\mu\nu}$ не могут быть полностью независимы друг от друга, они должны удовлетворять четырем тождествам. Это условие непосредственно связано с условием общей ковариантности. Предположим, что нами получена система десяти ковариантных уравнений для $g_{\mu\nu}$ и что известно одно из решений этих уравнений. В этом случае новые решения этих уравнений можно получить просто преобразованием координат. Зависимость преобразованных компонент метрического тензора $g^*_{\mu\nu}$ от $\xi^{*\rho}$ будет иной, чем зависимость $g_{\mu\nu}$ от ξ^ρ. Эти формально

[1]) На то, что уравнения поля должны быть второго порядка указывают также соображения, связанные с переходом к нерелятивистским уравнениям гравитации, т. е. к уравнению Пуассона (*Прим. ред.*).

различные решения в сущности являются эквивалентными представлениями одного и того же физического состояния, так как их различие отражает только возможность произвольного выбора систем отсчета, в которых может быть описано гравитационное поле. Таким образом, действительно отличных друг от друга гравитационных полей гораздо меньше, чем формально различных решений уравнений поля.

Чтобы ограничить число формальных решений, на систему координат следует наложить дополнительное условие. Так как преобразования координат содержат четыре произвольные функции (в четырехмерном пространстве), то можно составить четыре уравнения для $g_{\mu\nu}$, которые не должны быть ковариантными. Эти уравнения должны быть выбраны таким образом, чтобы, исходя из произвольной совокупности $g_{\mu\nu}$, им можно было бы удовлетворить после соответствующего преобразования координат. Такие уравнения называются координатными условиями.

При добавлении к десяти ковариантным уравнениям поля четырех координатных условий получается система из четырнадцати уравнений, имеющая то же множество неэквивалентных решений, что и система десяти уравнений поля, взятая отдельно, но с меньшим числом формально различных решений.

Четырнадцать полностью независимых уравнений для десяти переменных имели бы слишком мало решений. Эти решения соответствуют либо плоской метрике, либо, в лучшем случае, они определяют значительно меньшее количество действительно различных состояний, чем то, которое можно получить, допуская произвольное распределение материи в пространстве. Поэтому, кроме четырнадцати уравнений, $g_{\mu\nu}$ должны удовлетворять четырем тождествам.

Четыре координатные условия являются в значительной степени произвольными. Они могут быть любыми нековариантными уравнениями, содержащими $g_{\mu\nu}$, которые можно удовлетворить любой метрикой после соответствующего выбора системы координат. Так как выбор конкретных координатных условий не влияет на характер решений,

необходимо, чтобы тождества содержали только ковариантные уравнения поля и чтобы они были независимы от координатных условий.

Предыдущие рассуждения показывают, что десять уравнений поля в силу их ковариантности должны удовлетворять четырем тождествам. Однако до сих пор мы еще ничего не знаем о форме самих уравнений и природе соответствующих им тождеств. Чтобы решить эти вопросы, используем свойства тензора $P^{\mu\nu}$. Если рассматривать материю как сплошную среду, правыми частями уравнений гравитационного поля будут величины $P^{\mu\nu}$, подобно тому, как компоненты мирового вектора тока образуют правые части уравнений Максвелла. Аналогично тому, что закон сохранения электрического заряда выражается уравнением

$$I^{\rho}{}_{;\rho}=0,$$

закон сохранения энергии и импульса может быть выражен уравнением

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{12.2}$$

Поэтому можно ожидать, что десять величин, стоящих в левых частях уравнений поля, являются компонентами симметричного тензора второго ранга, а четыре тождества имеют вид дивергенций.

Уравнения поля. В главе XI мы встречались с тензорными выражениями, обладающими подобными свойствами. Таковым является тензор $G^{\mu\nu}$, определенный с помощью (11.47). Можно показать, что не существует другого тензора, десять компонент которого зависели бы только от $g_{\mu\nu}$, а его дивергенция тождественно обращалась бы в нуль[1]). Поэтому уравнения гравитационного поля мы запишем в следующем виде:

$$G^{\mu\nu}+a\,P^{\mu\nu}=0, \quad G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R, \tag{12.3}$$

---

[1]) Конечно, кроме самого тензора $g_{\mu\nu}$. *(Прим. ред.)*

где материя представляется тензором $P^{\mu\nu}$. Если же материя представляется точечными массами, уравнения гравитационного поля вне точечных масс будут иметь вид

$$G^{\mu\nu}=0, \tag{12.4}$$

однако они перестают быть справедливыми в местах расположения точечных масс. Постоянная α в уравнениях (12.3) будет определена ниже.

Уравнения поля (12.4) удовлетворяют тождествам

$$G^{\mu\rho}_{;\rho}\equiv 0, \tag{12.5}$$

в силу чего уравнения (12.2) являются непосредственным следствием уравнений (12.3):

$$0=(G^{\mu\rho}+\alpha P^{\mu\rho})_{;\rho}\equiv \alpha P^{\mu\rho}_{;\rho}. \tag{12.6}$$

Линейное приближение и нормальные координатные условия. Полученные уравнения поля и законы движения в гравитационном поле нелинейны относительно переменных поля $g_{\mu\nu}$. Однако известно, что линейная теория — теория Ньютона — с большой степенью точности описывает движение тел под действием сил. Поэтому необходимо предположить, что гравитационные поля (т. е. отклонение истинной метрики от плоской), с которыми мы встречаемся, например, в небесной механике, настолько слабы, что нелинейный характер уравнений поля ведет лишь к эффектам второго порядка. В метрической системе единиц, которой обычно пользуются при измерениях, наблюдаемые в природе гравитационные ускорения — порядка единицы, в то время как скорость света c — весьма большая величина. В теории гравитации удобно пользоваться другими единицами, в которых скорость света равна не 3.10^{10}, а 1. Сохраним сантиметр в качестве единицы длины, а за единицу времени и собственного времени выберем величину, в 3.10^{10} раз

меньшую, чем секунда. В этих единицах метрический тензор плоской метрики имеет компоненты:

$$\varepsilon_{\rho\sigma} = \begin{Bmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{Bmatrix}^{1)} \tag{12.7}$$

То обстоятельство, что скорости большинства материальных тел малы по сравнению со скоростью света, в новых единицах выражается в том, что U^t, пространственные компоненты U^ρ, малы в сравнении с единицей.

Предположим, что, используя новые единицы времени, можно ввести такие системы координат, в которых компоненты метрического тензора разлагаются в ряды

$$g_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\rho\sigma} + \lambda \underset{1}{h}_{\rho\sigma} + \lambda^2 \underset{2}{h}_{\rho\sigma} + \ldots, \tag{12.8}$$

где параметром разложения является малая постоянная λ.

Контравариантный метрический тензор имеет в этом случае компоненты

$$\left.\begin{aligned} g^{\rho\sigma} &= \varepsilon^{\rho\sigma} + \lambda \underset{1}{h}^{\rho\sigma} + \lambda^2 \underset{2}{h}^{\rho\sigma} + \ldots, \\ \varepsilon^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{\rho\sigma}, \\ \underset{1}{h}^{\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\rho\alpha}\varepsilon^{\sigma\beta}\underset{1}{h}_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

Детерминант метрического тензора равен

$$g \equiv |g_{\rho\sigma}| = -(1 + \lambda \varepsilon^{\rho\sigma} \underset{1}{h}_{\rho\sigma} + \ldots). \tag{12.10}$$

---

1) В дальнейшем через $\varepsilon_{\rho\sigma}$ всегда будут обозначаться компоненты метрического тензора плоского пространства, выраженные в новых единицах времени, обозначение же $\eta_{\rho\sigma}$ мы сохраним для тех случаев, когда будут использоваться обычные метрические единицы.

Перейдем к рассмотрению уравнений движения. Они записываются в виде:

$$\frac{dU^\rho}{d\tau} = -g^{\rho\sigma}[\iota\varkappa, \sigma]\, U^\iota U^\varkappa. \qquad (12.11)$$

Символы Кристоффеля $[\iota\varkappa,\sigma]$ будут малыми величинами первого порядка относительно λ. Пренебрегая величинами высших порядков, заменим $g^{\rho\sigma}$ на $\varepsilon^{\rho\sigma}$. Далее, пока скорости малы по сравнению с c, можно пренебречь членами, содержащими U^i в качестве множителей, а U^4 — считать равным единице. Тогда (12.11) заменится приближенным уравнением

$$\frac{dU^\rho}{d\tau} \sim -\varepsilon^{\rho\sigma}[44, \sigma] \sim -\frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\lambda\,(2\underset{1}{h}_{4\sigma,4} - \underset{1}{h}_{44,\sigma}). \qquad (12.12)$$

Наконец, если поле медленно меняется во времени — это соответствует тому, что образующие поле точечные массы движутся с небольшими скоростями, — можно пренебречь производными по ξ^4, которые малы по сравнению с производными по пространственным координатам ξ^i. Тогда для первых трех уравнений (12.12) получим:

$$\frac{dU^i}{d\tau} \sim -\frac{1}{2}\lambda\underset{1}{h}_{44,i}. \qquad (12.13)$$

Сравнивая это уравнение с классическим выражением для силы (10.5), увидим, что $\frac{1}{2}\lambda\underset{1}{h}_{44}$ играет роль ньютоновского гравитационного потенциала. Это обстоятельство поможет нам в дальнейшем интерпретировать решения уравнений поля.

Перейдем теперь к нахождению линейного приближения для уравнений поля. Ограничиваясь линейными выражениями, можно значительно упростить вид этих уравнений.

В тензоре

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \\ &= \left\{ {\rho \atop \nu\rho} \right\}_{,\mu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{,\rho} - \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \\ &+ \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left(\left\{ {\rho \atop \alpha\rho} \right\}_{,\beta} - \right. \\ &\left. - \left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\}_{,\rho} - \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} \left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \alpha\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \beta\sigma} \right\} \right) \end{aligned}\right\} \tag{12.14}$$

можно пренебречь всеми членами, не линейными относительно $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$. Это относится ко всем членам, не линейным относительно символов Кристоффеля; в оставшихся членах все непродифференцированные $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ заменим на $\varepsilon_{\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\mu\nu}$. Тогда получим „линеаризованные“ выражения

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\sim \frac{\lambda}{2} \Big[\underset{1}{h}_{,\nu\mu} + \varepsilon^{\rho\sigma} (\underset{1}{h}_{\mu\nu,\rho\sigma} - \underset{1}{h}_{\mu\rho,\nu\sigma} - \underset{1}{h}_{\nu\rho,\mu\sigma}) - \\ &\quad - \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\rho\sigma} (\underset{1}{h}_{,\rho\sigma} - \varepsilon^{\tau\alpha} \underset{1}{h}_{\rho\tau,\sigma\alpha}) \Big], \\ \underset{1}{h} &= \varepsilon^{\rho\sigma} \underset{1}{h}_{\rho\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

Выражение (12.15) может быть несколько упрощено введением обозначений

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} &= \underset{1}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \underset{1}{h}, \\ \underset{1}{h}_{\mu\nu} &= \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \underset{1}{\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

Выражая линеаризованные $G_{\mu\nu}$ через $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$, получим

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\sim \frac{\lambda}{2} (\varepsilon^{\rho\sigma} \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} - \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\rho\sigma} \sigma_{\rho,\sigma}), \\ \sigma_{\mu} &= \varepsilon^{\rho\sigma} \underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

При решении уравнений поля (12.3) и (12.4) еще остаются значительные трудности, так как каждая линеаризованная компонента $G_{\mu\nu}$ (12.17) зависит от нескольких компонент $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$, и поэтому десять уравнений поля должны решаться одновременно. Однако задачу можно значительно упростить благодаря возможности введения координатных условий. Мы покажем, что всегда возможно произвести такое преобразование координат, в результате которого выражение σ_μ обращается в нуль.

Рассмотрим преобразования координат вида

$$\xi^{*\alpha} = \xi^\alpha + \lambda v^\alpha(\xi^\rho), \tag{12.18}$$

при которых изменение значений координат пропорционально параметру λ. Обратными преобразованиями с точностью до величин первого порядка относительно λ будут:

$$\xi^\alpha = \xi^{*\alpha} - \lambda v^\alpha(\xi^\rho) \sim \xi^{*\alpha} - \lambda v^\alpha(\xi^{*\rho}). \tag{12.19}$$

Компоненты метрического тензора (12.8) в том же приближении преобразуются по следующему закону:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\mu}}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\xi^{*\nu}} g_{\alpha\beta} \sim \\ &\sim (\delta^\alpha_\mu - \lambda v^\alpha_{,\mu*})(\delta^\beta_\nu - \lambda v^\beta_{,\nu*})(\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \underset{1}{h}_{\alpha\beta}) \sim \\ &\sim \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda(\underset{1}{h}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*}). \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

Отсюда получаем закон преобразования $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$:

$$\overset{*}{\underset{1}{h}}_{\mu\nu} = \underset{1}{h}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*}. \tag{12.20a}$$

$\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ преобразуются следующим образом:

$$\overset{*}{\underset{1}{\gamma}}_{\mu\nu} = \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*} + \varepsilon_{\mu\nu} v^\rho_{,\rho*}, \tag{12.21}$$

а выражения σ_μ согласно закону

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\mu^* = \sigma_\mu - \varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon^{\rho\sigma}v^\alpha_{,\rho^*\sigma^*} = \sigma_\mu - \varepsilon^{\rho\sigma}v_{\mu,\rho\sigma},\\ v_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha}v^\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (12.22)$$

Все эти соотношения справедливы с точностью до членов первого порядка относительно λ.

Система координат, в которой σ_μ равны нулю, получается в результате преобразования координат (12.18) с v^α, удовлетворяющими следующим дифференциальным уравнениям

$$\varepsilon^{\rho\sigma}v_{\alpha,\rho\sigma} = \sigma_\alpha. \qquad (12.23)$$

Эти уравнения, дифференциальные уравнения Пуассона в четырех измерениях, всегда имеют решения.

В линейном приближении уравнения поля заменяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\lambda\varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} + 2aP_{\mu\nu} = 0,\\ \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma} = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (12.3a)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0,\\ \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (12.4a)$$

Таким образом, мы добились разделения переменных в дифференциальных уравнениях второго порядка, благодаря чему рассмотрение их решений сильно упрощается.

Решение линеаризованных уравнений поля. Рассмотрим сначала статические решения уравнений поля, т. е. решения, не зависящие от ξ^4. Предполагая, что переменные поля зависят только от трех координат ξ^s, линеаризованные уравнения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}-\lambda\Gamma^2\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} + 2aP_{\mu\nu} = 0,\\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s,s} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (12.24)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} &= 0,\\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s, s} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

Обычно компонента $P_{44} = P^{44} = \rho$ велика по сравнению с остальными компонентами тензора $P_{\mu\nu}$. Поэтому рассмотрим следующий случай:

$$\left.\begin{aligned}-\lambda\nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{44} + 2\alpha\rho &= 0,\\ \nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{\mu i} &= 0,\\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s, s} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

Эти уравнения могут быть решены в предположении что из всех величин $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ только компонента $\underset{1}{\gamma}_{44}$ отлична от нуля. $\underset{1}{\gamma}_{44}$ удовлетворяет уравнению Пуассона в трех измерениях. Решение представляется интегралом

$$\lambda \underset{1}{\gamma}_{44}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{12.27}$$

Мы уже видели, что величина $\frac{1}{2}\lambda \underset{1}{h}_{44}$ должна играть роль классического гравитационного потенциала G, входящего в уравнения (10.5) и (10.7). Так как из всех $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ только $\underset{1}{\gamma}_{44}$ отлична от нуля, для $\underset{1}{h}_{44}$ получаем выражение

$$\underset{1}{h}_{44} = \underset{1}{\gamma}_{44} - \frac{1}{2}\varepsilon_{44}\varepsilon^{44}\underset{1}{\gamma}_{44} = \frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44}. \tag{12.28}$$

Отсюда видно, что $\underset{1}{h}_{44}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-2\nabla^2 \underset{1}{h}_{44} + \alpha\rho = 0. \tag{12.29}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (10.7), найдем, что постоянная α равна

$$\alpha = 8\pi\varkappa. \tag{12.30}$$

Теория гравитации, в которой материя рассматривается как сплошная среда, остается неполной, пока неизвестно уравнение состояния среды. Если материя настолько разрежена, что не существует взаимодействия между соседними элементами объема, тензор $P^{\mu\nu}$ можно заменить через

$$P^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu},$$

где U^{μ} удовлетворяет уравнению (12.1), а изменение ρ определяется законами сохранения

$$(\rho U^{\mu} U^{\nu})_{;\nu} = 0,$$
$$(\rho U^{\mu} U^{\nu})_{;\nu} U_{\mu} \equiv (\rho U^{\nu})_{;\nu} = 0.$$

Во всех остальных случаях необходимо делать какие-то предположения относительно характера внутренних сил в среде. При этом еще не так легко выяснить, совместимы ли эти предположения с принципами теории относительности. Например, с релятивистской точки зрения понятия абсолютно твердого тела или несжимаемой жидкости не имеют смысла. В таких средах упругие волны должны распространяться с бесконечно большой скоростью, в противоречии с основным принципом теории относительности о невозможности распространения сигнала со скоростью, большей c. Если бы существовала релятивистская теория, описывающая взаимодействие отдельных частиц среды, можно было бы найти уравнение состояния, не противоречащее принципу теории относительности. В действительности это сделано лишь для немногих типов молекулярных взаимодействий.

Поле точечной массы. Рассмотрим теперь представление материи в виде отдельных точечных масс, в связи с чем обратимся к линеаризованным уравнениям поля (12.4а).

Прежде всего определим поле, создаваемое покоящейся точечной массой. Оно будет статическим и сферически симметричным. Поместим точечную массу в начало координат. Единственными решениями уравнения Лапласа, исчезающими на бесконечности и не имеющими особенностей во всем пространстве, кроме начала координат, являются производные различных порядков от функции $\frac{1}{r}$ и их линейные комбинации. Для того чтобы решить первую систему уравнений (12.25), предположим, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda \underset{1}{\gamma}_{44} &= \frac{a}{r}, \\ \lambda \underset{1}{\gamma}_{4s} &= b\left(\frac{1}{r}\right)_{,s}, \\ \lambda \underset{1}{\gamma}_{st} &= c\left(\frac{1}{r}\right)_{,st} + f\frac{1}{r}\delta_{st}, \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

где a, b, c и f — постоянные, которые нужно определить. Удовлетворим теперь второй системе уравнений (12.25), т. е. координатным условиям. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\sigma_4 &= -b\left(\frac{1}{r}\right)_{,ss} \equiv 0, \\ \lambda\sigma_s &= -c\left(\frac{1}{r}\right)_{,stt} - f\left(\frac{1}{r}\right)_{,s} \equiv -f\left(\frac{1}{r}\right)_{,s}. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Постоянная f должна обращаться в нуль, тогда как остальные постоянные остаются произвольными. Однако при более внимательном рассмотрении можно убедиться, что члены, содержащие постоянные b и c, зависят от выбора системы координат. Производя преобразование координат (12.18), эти члены можно исключить, выбирая функции v^α следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v^4 &= \frac{b}{r}, \\ v^s &= -\left(\frac{c}{r}\right)_{,s}. \end{aligned}\right\} \tag{12.33}$$

В соответствии с законом преобразования (12.21), найдем, что наше решение при этом примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \underset{1}{\gamma}_{44} = \frac{a}{r}, \\ &\underset{1}{\gamma}_{4s} = 0, \quad \underset{1}{\gamma}_{st} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.31a}$$

Остающаяся постоянная a определяется образующей поле массой. Ньютоновский потенциал поля, образуемого массой M, равен:

$$G = -\frac{\varkappa M}{r}.$$

Так как $\frac{1}{2}\lambda \underset{1}{h}_{44}$ соответствует G, то в силу уравнения (12.28) находим, что постоянная a связана с массой M соотношением

$$M = -\frac{a}{4\varkappa}. \tag{12.34}$$

Гравитационные волны. Рассмотренные до сих пор решения уравнений поля аналогичны решениям классической теории гравитации. Однако существуют еще решения, типичные для рассматриваемой теории поля. Наиболее важными из них являются „гравитационные волны" — быстро меняющиеся поля, возникающие всегда, когда точечные массы испытывают ускорения.

Рассмотрим плоские волновые поля, зависящие только от ξ^4 и ξ^1. В этом случае существуют волны, распространяющиеся только в положительном и отрицательном направлениях оси Ξ^1. Общий вид компонент волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ξ^1, будет

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{\gamma}_{44} = \underset{1}{\gamma}_{44}(\xi^1 - \xi^4), \\ &\underset{1}{\gamma}_{4s} = \underset{1}{\gamma}_{4s}(\xi^1 - \xi^4), \\ &\underset{1}{\gamma}_{rs} = \underset{1}{\gamma}_{rs}(\xi^1 - \xi^4). \end{aligned}\right\} \tag{12.35}$$

Уравнения поля удовлетворяются автоматически. Координатные условия принимают вид

$$\underset{1}{\gamma}_{\mu 4,4} - \underset{1}{\gamma}_{\mu 1,1} = -(\gamma'_{\mu 4} + \gamma'_{\mu 1}) = 0, \qquad (12.36)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу (ξ^1—ξ^4). Отсюда получаем условия

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{\gamma}'_{44} = \underset{1}{\gamma}'_{11} = -\underset{1}{\gamma}'_{14}, \\ &\underset{1}{\gamma}'_{12} = -\underset{1}{\gamma}'_{42}, \\ &\underset{1}{\gamma}'_{13} = -\underset{1}{\gamma}'_{43}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.36а)$$

остальные компоненты $\underset{1}{\gamma}_{22}$, $\underset{1}{\gamma}_{23}$ и $\underset{1}{\gamma}_{33}$ остаются произвольными функциями аргумента (ξ^1 — ξ^4).

Некоторые из этих компонент не имеют физического смысла и могут быть исключены преобразованием координат. Если при преобразовании координат (12.18) v^α считать зависящим только от аргумента (ξ^1 — ξ^4), то закон преобразования (12.21) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{\gamma}^*_{11} = \underset{1}{\gamma}_{11} + v^{1'} + v^{4'}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{12} = \underset{1}{\gamma}_{12} - v^{2'}, \quad \underset{1}{\gamma}^*_{13} = \underset{1}{\gamma}_{13} - v^{3'}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{14} = \underset{1}{\gamma}_{14} - v^{4'} - v^{1'}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{22} = \underset{1}{\gamma}_{22} - v^{1'} + v^{4'}, \quad \underset{1}{\gamma}^*_{33} = \underset{1}{\gamma}_{33} - v^{1'} + v^{4'}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{23} = \underset{1}{\gamma}_{23}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{24} = \underset{1}{\gamma}_{24} + v^{2'}, \quad \underset{1}{\gamma}^*_{34} = \underset{1}{\gamma}_{34} + v^{3'}, \\ &\underset{1}{\gamma}^*_{44} = \underset{1}{\gamma}_{44} + v^{4'} + v^{1'}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.37)$$

Подходящим выбором четырех функций v^α можно перейти к системе координат, в которой все компоненты, у которых хотя бы один из индексов равен 1 или 4, обращаются в

нуль, и в которых обращается в нуль также выражение $\underset{1}{\gamma}_{22} + \underset{1}{\gamma}_{33}$. Не могут быть исключены преобразованиями координат только такие волны, для которых

$$\underset{1}{\gamma}_{22} = -\underset{1}{\gamma}_{33} \neq 0, \tag{12.38}$$

а также волны, для которых

$$\underset{1}{\gamma}_{23} \neq 0. \tag{12.39}$$

При повороте системы пространственных координат вокруг оси Ξ^1 на угол $\frac{\pi}{4}$ (45°) эти два типа волн переходят друг в друга.

Гравитационные волны не имеют аналога в классической теории. Такие волны должны излучаться осциллирующими системами, какими, например, являются двойные звезды, планеты и т. д. К сожалению, интенсивность излучаемых ими волн настолько мала, что их невозможно обнаружить при помощи имеющихся в нашем распоряжении средств.

Эйнштейн и Розен[1]) исследовали волновые решения точных нелинейных уравнений поля. Ими было показано, что в этом случае не существует решений в виде плоских волн, но существует решение в виде цилиндрических волн. Этот результат был получен ими чисто формальным путем, однако возможна его физическая интерпретация. Гравитационные волны, так же как и электромагнитные, переносят энергию[2]). Плотность этой энергии сама является источником стационарного гравитационного поля, которое деформирует метрику, благодаря чему гравитационные волны должны распространяться в пространстве с измененной метрикой. В плоской волне плотность энергии постоянна во всем пространстве, поэтому искривление метрики будет

---

[1]) „On Gravitational Waves", Journal Franklin Inst., **223**, 43 (1937).

[2]) Понятие энергии в общей теории относительности будет рассмотрено в конце этой главы.

увеличиваться до бесконечности во всех направлениях. Цилиндрические волны обладают особенностями на оси симметрии, и существуют решения, при которых с бесконечным возрастанием ρ (в эвклидовом пространстве ρ означает расстояние от оси) амплитуда волны стремится к нулю, а амплитуда стационарного поля — к бесконечности.

Таким образом, в результате рассмотрения „линеаризованных" уравнений поля релятивистской теории гравитации, мы убедились, что, кроме решений, соответствующих ньютоновским полям, существуют решения, не имеющие аналогов в классической теории; это гравитационные волны, распространяющиеся со скоростью света. После того как мы установили, что классическая теория гравитации является апроксимацией решений релятивистских уравнений, перейдем к рассмотрению формальных свойств этих релятивистских уравнений поля.

Вариационный принцип. Классические уравнения поля (10.7) могут рассматриваться, как уравнения Эйлера-Лагранжа вариационной задачи (или принципа Гамильтона)

$$\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2 \, dV = 0, \tag{12.40}$$

где интеграл распространяется по всему трехмерному объему V; вариация G произвольна внутри области интегрирования V и исчезает на ее границах. Вариацию интеграла (12.40) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2 \, dV &= 2 \int_V (\operatorname{grad} G \cdot \delta \operatorname{grad} G) \, dV = \\
&= 2 \int_V (\operatorname{grad} G \cdot \operatorname{grad} \delta G) \, dV = \\
&= 2 \int_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} G \cdot \delta G) \, dV - 2 \int_V \nabla^2 G \, \delta G \, dV = \\
&= 2 \oint_s \delta G \, (\operatorname{grad} G \cdot \mathbf{dS}) - 2 \int_V \nabla^2 G \, \delta G \, dV.
\end{aligned}$$

Первый интеграл последнего выражения равен нулю в силу того, что δG исчезает на границах. Поэтому

$$\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2 dV = -2 \int_V \nabla^2 G \, \delta G \, dV, \qquad (12.41)$$

и из того, что δG произвольно внутри V, следует, что интеграл $\int_V (\operatorname{grad} G)^2 \, dV$ экстремален только, когда G удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G = 0. \qquad (12.42)$$

Аналогично релятивистские уравнения поля (12.4) могут рассматриваться, как уравнения Эйлера-Лагранжа принципа Гамильтона. В этом случае интеграл распространяется по четырехмерному объему

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_D R \sqrt{-g} \, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \\ \delta I &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12.43)$$

Вариации $g_{\mu\nu}$ (и их первых производных) попрежнему произвольны внутри четырехмерной области интегрирования D и должны исчезать на ее границах.

Интеграл I является инвариантом. Подинтегральное выражение

$$\mathfrak{R} = \sqrt{-g} R \qquad (12.44)$$

представляет собой скалярную плотность, преобразующуюся по закону

$$\mathfrak{R}^* = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right| \mathfrak{R};$$

поэтому I преобразуется следующим образом:

$$I^* = \int \mathfrak{R}^* d\xi^{*1} d\xi^{*2} d\xi^{*3} d\xi^{*4} = \int \mathfrak{R} \det \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right| d\xi^{*1} d\xi^{*2} d\xi^{*3} d\xi^{*4}.$$

Из теории кратных интегралов известно, что при переходе к новым переменным интегрирования подинтегральное вы-

ражение умножается на якобиан преобразования, другими словами, I^* — тот же интеграл, что и I:

$$I^* = I.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа выражают необходимые условия стационарности некоторого интеграла относительно вариации переменных, входящих в его подинтегральную функцию. Если интеграл инвариантен относительно преобразования координат, соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа выражают условия, которые не могут зависеть от выбора координат; другими словами, уравнения Эйлера-Лагранжа для инвариантного принципа Гамильтона являются ковариантными дифференциальными уравнениями.

Выразим теперь вариацию интеграла

$$\left.\begin{aligned} I = \int \Big(\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\}_{,\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{,\rho} - \left\{ {\sigma \atop \sigma\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \\ + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \Big) g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\xi, \\ d\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 \end{aligned}\right\} \quad (12.45)$$

через вариации $g^{\mu\nu}$ [1]). Разобьем вариацию интеграла на две части следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \delta \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\xi = \int \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} d\xi + \\ + \int R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (12.46)$$

Предварительно выразим вариацию $R_{\mu\nu}$ через вариации символов Кристоффеля:

$$\left.\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} \right)_{,\nu} - \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \right)_{,\rho} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \delta \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} - \\ - \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} \delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \delta \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \delta \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (12.47)$$

---

[1]) Здесь за независимые переменные удобно принять контравариантные компоненты тензора $g^{\mu\nu}$. Конечный результат расчета не будет зависеть от такого выбора, поскольку $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ однозначно определяют друг друга.

Известно, что символы Кристоффеля не являются тензорами, так как они преобразуются согласно закону (5.81). Однако если в одном и том же пространстве определить две различные аффинные связности, то их разность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ будет преобразовываться как смешанный тензор третьего ранга, так как последний член в уравнении (5.81) сократится с подобным ему. Вариация символа Кристоффеля $\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ является тензором, ибо она представляется разностью двух аффинных связностей, варьированного и неварьированного символов Кристоффеля.

Так как левая часть (12.47) является тензором, то правая часть может содержать только ковариантные производные тензора $\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что правая часть (12.47) равна

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} \right)_{;\nu} - \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \right)_{;\rho}. \tag{12.48}$$

Возможность такого упрощения (12.47) впервые была указана Палатини. Умножим обе части равенства (12.48) на $g^{\mu\nu}$. Здесь $g^{\mu\nu}$ можно ввести под знак дифференцирования, поскольку ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \left(g^{\mu\nu}\delta \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} \right)_{;\nu} - \left(g^{\mu\nu}\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \right)_{;\rho} = \\ &= \left(g^{\mu\nu}\delta \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} - g^{\mu\nu}\delta \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} \right)_{;\sigma}. \end{aligned} \right\} \tag{12.49}$$

Это выражение представляет собой ковариантную дивергенцию вектора. В задаче 10, б) главы V было установлено, что ковариантная дивергенция $V^{\sigma}_{;\sigma}$ может быть представлена в виде

$$V^{\sigma}_{;\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g}\, V^{\sigma} \right)_{,\sigma}. \tag{12.50}$$

Используя эту формулу для подинтегрального выражения первого интеграла правой части уравнения (12.46), получим:

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \\ = \left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta\left\{{\rho \atop \mu\rho}\right\} - g^{\mu\nu}\delta\left\{{\sigma \atop \mu\nu}\right\}\right)\right]_{,\sigma}. \quad (12.51)$$

Это выражение является, таким образом, обычной дивергенцией. По теореме Гаусса (которая в n-мерном пространстве так же справедлива, как и в трехмерном) интеграл

$$\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\, d\xi$$

может быть преобразован в интеграл по граничной поверхности; этот интеграл равен нулю в силу того, что вариация $\delta\left\{{\sigma \atop \mu\nu}\right\}$ исчезает на всей граничной поверхности.

Остается второй интеграл уравнения (12.46). $\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})$ равно просто выражению:

$$\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} g^{\mu\nu}\delta g^{\rho\sigma}\right); \quad (12.52)$$

что после умножения на $R_{\mu\nu}$ дает

$$R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\delta g^{\mu\nu} = \\ = \sqrt{-g}\, G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (12.53)$$

Отсюда для вариации I получаем выражение:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\xi = \int G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\xi. \quad (12.54)$$

Таким образом, уравнения (12.4) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для принципа Гамильтона (12.43).

Наличие одновременно гравитационного и электромагнитного поля. До сих пор гравитационные поля рассматривались в отсутствии электромагнитных полей. При наличии электромагнитного поля уравнения комбинированного поля можно получить, заменяя $P^{\mu\nu}$ в уравнениях (12.3) выражениями (8.31).

В этом случае имеем:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \frac{\varkappa}{c^6}\left(2\varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}\right) = 0, \\ \varphi^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (12.55)$$

Эти уравнения поля являются уравнениями Эйлера-Лагранжа, соответствующими интегралу

$$I = \int\limits_D \left(R - \frac{\varkappa}{c^6}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}\right)\sqrt{-g}\,d\xi, \quad (12.56)$$

который варьируется по 14 переменным $g^{\mu\nu}$ и φ_{μ}.

Уравнения движения заряженных точечных масс имеют вид

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau} + \left\{\begin{matrix}\mu \\ \rho\sigma\end{matrix}\right\} U^{\rho}U^{\sigma} - \frac{e}{mc^3}\varphi^{\mu\rho}U_{\rho} = 0. \quad (12.57)$$

Законы сохранения в общей теории относительности[1]. Тензор энергии-импульса $P^{\mu\nu}$ представляет в уравнениях (12.3) плотности энергии и импульса и напряжения среды, исключая энергию, импульс и напряжения гравитационного поля. Он удовлетворяет уравнению непрерывности

$$P^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0. \quad (12.58)$$

Эти уравнения ковариантны, они преобразуются как компоненты вектора. Именно поэтому они не могут быть названы законами сохранения в обычном смысле слова. В обычном законе сохранения изменение во времени некоторого пространственного трехмерного интеграла определяется поверхностным интегралом другого выражения, представляющим поток через поверхность, ограничивающую трехмерный

---

[1]) В этом разделе рассматривается понятие переноса энергии в общей теории относительности. Поскольку понятия энергии и импульса не играют существенной роли в общей теории относительности, читатель может опустить этот раздел без ущерба для понимания последующих глав.

объем. Другими словами, истинный закон сохранения имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_V P d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3\right) = -\oint\limits_S (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}),$$

или после применения к поверхностному интегралу теоремы Гаусса:

$$\int\limits_V \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{F}\right] d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = 0, \quad P_{,4} + F^s{}_s = 0. \quad (12.59)$$

В общей теории относительности закон сохранения электрического заряда имеет такую форму:

$$(\sqrt{-g}\,\varphi^{\mu\rho})_{,\rho\mu} = 0, \qquad (12.60)$$

а выражения $\int\limits_V (\sqrt{-g}\,\varphi^{4\rho})_{,\rho} d\xi$, $\int\limits_S (\sqrt{-g}\,\varphi^{1\rho})_{,\rho} d\xi^2 d\xi^3$ и т. д. представляют собой заряд, содержащийся в объеме V, ток через поверхность, параллельную плоскости (X^2, X^3), и т. д.

В то время как ковариантная дивергенция вектора эквивалентна обычной дивергенции векторной плотности, ковариантная дивергенция симметричного тензора второго ранга не эквивалентна обычной дивергенции соответствующей тензорной плотности. Однако можно найти четыре выражения, удовлетворяющие четырем обычным законам сохранения и не являющихся при этом компонентами тензора.

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sqrt{-g}\,P_{\mu.;\nu}^{\ \nu} = \sqrt{-g}\Big(P_{\mu.,\nu}^{\ \nu} + \left\{{\nu \atop \rho\nu}\right\} P_{\mu.}^{\ \rho} - \\ - \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} P_{\rho.}^{\ \nu}\Big) = (\sqrt{-g}\,P_{\mu.}^{\ \nu})_{,\nu} - \sqrt{-g}\left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} P_{\rho.}^{\ \nu} \end{aligned}\right\} \quad (12.61)$$

без последнего члена имеют вид четырех законов сохранения. Покажем теперь, что последний член $\left(-\sqrt{-g}\left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} P_{\rho.}^{\ \nu}\right)$ может быть представлен в виде обычной дивергенции.

Прежде всего, в силу уравнений поля (12.3), $P_{\rho\cdot}^{\nu}$ можно заменить через $-\frac{1}{\alpha}G_{\rho\cdot}^{\nu}$. Далее рассмотрим выражение $\frac{1}{\alpha}\sqrt{-g}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}G_{\rho\cdot}^{\nu}$, содержащее только $g_{\mu\nu}$ и его производные. Заменяя символ Кристоффеля производными метрического тензора, получим:

$$\sqrt{-g}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}G_{\rho\cdot}^{\nu}=\sqrt{-g}\,[\mu\nu,\rho]\,G^{\rho\nu}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\nu\rho,\mu}G^{\rho\nu}. \qquad (12.62)$$

Для доказательства того, что последнее выражение есть обычная дивергенция 16 величин, используем тот факт, что выражения $\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}$ являются левыми частями уравнений Эйлера-Лагранжа вариационного принципа.

Сперва покажем, что существует вариационный интеграл, который содержит только первые производные метрического тензора и приводит к тем же уравнениям Эйлера-Лагранжа, что и интеграл (12.43).

Прибавление к подинтегральной функции $R\sqrt{-g}$ (обычной) дивергенции ведет к тому, что к интегралу (12.43) прибавляется выражение, которое с помощью теоремы Гаусса может быть записано в виде поверхностного интеграла. При таком варьировании подинтегрального выражения, когда вариации переменных и их производных исчезают на границах, добавочный член, обусловленный дивергенцией, остается неизменным. Поэтому уравнения Эйлера-Лагранжа не меняются при прибавлении дивергенции к $(\sqrt{-g}R)$ в уравнении (12.43).

Рассмотрим теперь интеграл (12.45). Первые два члена могут быть преобразованы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\rho\end{matrix}\right\}_{,\nu}-\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}_{,\rho}\right)\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}=\\ &=\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\rho\end{matrix}\right\}\right)_{,\nu}-\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\right)_{,\rho}-\\ &-\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)_{,\nu}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\rho\end{matrix}\right\}+\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)_{,\rho}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (12.63)$$

Первые два члена правой части имеют вид дивергенции. В силу сказанного выше уравнения Эйлера-Лагранжа останутся неизменными, если вычесть эти члены из $(\sqrt{-g}R)$. В оставшихся членах заменим всюду производные метрического тензора символами Кристоффеля согласно формуле

$$g_{\mu\nu,\rho} \equiv [\mu\rho,\nu] + [\nu\rho,\mu]. \tag{12.64}$$

Комбинируя их с остальными членами подинтегрального выражения (12.45), получим уравнение:

$$\left.\begin{aligned} &\delta I = \delta \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \int \mathfrak{H} d\xi, \\ &\mathfrak{H} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\begin{Bmatrix} \sigma \\ \rho\sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} \right). \end{aligned}\right\} \tag{12.65}$$

Функция $\mathfrak{H}$ не является, конечно, скалярной плотностью, а $\mathbf{W}$ не инвариантно относительно преобразования координат. Однако уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие интегралу $\mathbf{W}$, ковариантны. Рассматривая $\mathfrak{H}$ как функцию $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$, для $G_{\mu\nu}$ получим:

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} \right)_{,\rho} \tag{12.66}$$

Умножая это уравнение на $g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - \\ &- \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} \right)_{,\rho} \cdot g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \right)_{,\rho} + \\ &+ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} g^{\mu\nu}{}_{,\rho\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{12.67}$$

Сумма первого и последнего членов справа представляет собой производную $\mathfrak{H}$ по ξ^α. $\mathfrak{H}$ зависит от координат не

непосредственно, а через $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{,\rho}$. Поэтому имеем

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \left(\delta^{\rho}_{\alpha}\, \mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} \cdot g^{\mu\nu}_{,\alpha}\right)_{,\rho} \equiv$$

$$\equiv -\left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{t}^{\rho}_{\alpha}\right)_{,\rho}. \qquad (12.68)$$

На этом доказательство, в сущности, заканчивается. Действительно, выражение слева равно

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\alpha} = -\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}, \qquad (12.69)$$

откуда находим, что уравнения (12.61) приводятся к виду

$$0 = \left[\sqrt{-g}\left(P_{\mu\cdot}^{\ \nu} + \frac{1}{2\alpha}\, \mathfrak{t}^{\nu}_{\mu}\right)\right]_{,\nu} = \left[\sqrt{-g}\left(P_{\mu\cdot}^{\ \nu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{16\pi\varkappa}\, \mathfrak{t}^{\nu}_{\mu}\right)\right]_{,\nu}. \qquad (12.70)$$

Выражения

$$\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu} = P_{\mu\cdot}^{\ \nu} + \frac{1}{16\pi\varkappa}\, \mathfrak{t}^{\nu}_{\mu} \qquad (12.71)$$

не являются компонентами тензора. Однако они все же называются компонентами „псевдотензора“[1]) энергии-импульса общей теории относительности, так как удовлетворяют четырем законам сохранения (12.70)

Компоненты энергии-импульса гравитационного поля $\mathfrak{t}^{\nu}_{\mu}$ содержат только первые производные от $g_{\mu\nu}$; можно сказать, что они являются алгебраическими функциями гравитационных „напряженностей поля“. Для общей теории относительности характерно, что величины такого типа не могут быть тензорами. Всегда возможно найти такую систему отсчета, в которой «напряженность гравитационного поля“ в данной точке

---

[1]) Величины $\mathfrak{t}^{\nu}_{\mu}$ ведут себя как тензор относительно линейных преобразований. Во избежание путаницы, следует помнить, что в русской литературе термин „псевдотензор“ часто применяется также взамен термина „тензорная плотность“; однако между $\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu}$ и тензорной плотностью нет ничего общего. (*Прим. ред.*)

исчезает, и тогда компоненты энергии-импульса t_μ^ν в этой точке также обращаются в нуль.

Обратно, в плоском пространстве можно выбрать систему отсчета, в которой наблюдаются „силы инерции". По принципу эквивалентности в данной точке „силы инерции" нельзя отличить от гравитационных полей; поэтому компоненты t_μ^ν отличны от нуля в неинерциальной системе координат.