Глава XIII

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Уравнения поля общей теории относительности нелинейны. Пока мы нашли решения только приближенных линейных уравнений. В этой главе будут рассмотрены случаи, в которых возможно решение точных уравнений в конечном виде.

Общего метода нахождения точных решений уравнений поля не существует. Однако точное решение возможно в тех немногих случаях, когда число переменных можно уменьшить, используя условия симметрии.

Решение Шварцшильда. Рассмотрим сначала решение, соответствующее покоящейся точечной массе. Предположим, что решение сферически симметрично и что ни одна из переменных не зависит от ξ^4. Если ввести переменную

$$r=\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}, \tag{13.1}$$

наиболее общим видом линейного элемента с указанными свойствами будет

$$\left.\begin{aligned} d\tau^2 &= A(r)d\xi^{4^2}+2B(r)\chi_s d\xi^4 d\xi^s - C(r)\delta_{rs}d\xi^r d\xi^s + \\ &\quad + D(r)\chi_r\chi_s d\xi^r d\xi^s, \\ \chi_r &= \frac{\xi^r}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

где A, B, C и D являются функциями от r. Этот линейный элемент не меняет своего вида при повороте пространственных координат ξ^s вокруг оси, проходящей через начало координат.

Подходящим преобразованием координат можно исключить две из четырех неизвестных функций A, B, C и D,

не нарушая при этом статического характера задачи и сферической симметрии линейного элемента. Производя сначала преобразование координат

$$\xi^{*4}=\xi^4+f(r), \quad \xi^{*s}=\xi^s, \tag{13.3}$$

можно исключить члены, содержащие произведения $d\xi^s$ и $d\xi^4$. Компоненты g_{4s} преобразуются при этом согласно уравнению

$$\overset{*}{g}_{4s}=g_{44}\frac{\partial\xi^4}{\partial\xi^{*s}}+g_{4s}$$

или

$$B^*=B-\frac{df}{dr}\cdot A. \tag{13.4}$$

Выбирая f так, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{df}{dr}=\frac{B}{A}, \tag{13.5}$$

можно исключить член, содержащий B.

Рассмотрим далее метрику с компонентами

$$\left.\begin{aligned} &g_{44}=A, \quad g_{4s}=0,\\ &g_{rs}=-C\delta_{rs}+D\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Преобразуя пространственные координаты следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &\xi^{*s}=g(r)\,\xi^s,\\ &\xi^s=\psi(r^*)\,\xi^{*s}, \quad r=\psi\cdot r^*, \quad \chi_s^*=\chi_s, \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

получим новую систему координат, в которой метрика сохраняет прежний вид (13.6), но где функция C — постоянная и равна единице. Компоненты g_{rs} преобразуются

по закону

$$\left.\begin{aligned}
g^*_{rs} &= \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi^*_r}\frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^*_s} g_{lk} = \\
&= \left(\psi\delta^l_r + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_l\chi_r\right)\left(\psi\delta^k_s + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_k\chi_s\right)\times \\
&\qquad \times\left(-C\delta_{lk} + D\chi_l\chi_k\right) = \\
&= -\psi^2 C\delta_{rs} + \left[\left(\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)^2 D - \right. \\
&\left. - r^*\frac{d\psi}{dr^*}\times\left(2\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)C\right]\chi_r\chi_s.
\end{aligned}\right\} \quad (13.8)$$

В полученной системе координат C будет равно единице, если ψ в (13.7) выбрать следующим образом:

$$\psi = C^{-1/2}. \quad (13.9)$$

Остаются только две неизвестные функции A и D. Вместо них введем две другие функции от r, функции — μ и ν, с помощью которых решение уравнений поля значительно упрощается. Новые функции зададим уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&g_{44} = A = e^{\mu}, \\
&g_{4s} = 0, \\
&g_{rs} = -\delta_{rs} + D\chi_r\chi_s = -\delta_{rs} + (1 - e^{\nu})\chi_r\chi_s, \\
&\qquad \nu = \log(1 - D).
\end{aligned}\right\} \quad (13.10)$$

Для компонент контравариантного метрического тензора получим:

$$\left.\begin{aligned}
&g^{44} = e^{-\mu}, \\
&g^{4s} = 0, \\
&g^{rs} = -\delta_{rs} + (1 - e^{-\nu})\chi_r\chi_s.
\end{aligned}\right\} \quad (13.11)$$

Найдем теперь символы Кристоффеля и компоненты тензора $G_{\mu\nu}$. Для символов Кристоффеля первого рода имеем

$$\left.\begin{aligned}
&[44,\ s]=-\frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s,\\
&[4s,\ 4]=\frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s,\\
&[rs,\ t]=\chi_t\left[\frac{1-e^{\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s)-\frac{1}{2}\nu' e^{\nu}\chi_r\chi_s\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(13.12)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по r. Компоненты, в которые индекс 4 входит нечетное число раз, равны нулю. Символы Кристоффеля второго рода имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}s\\44\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\mu' e^{\mu-\nu}\chi_s,\\
&\left\{\begin{matrix}4\\4s\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\mu'\chi_s\\
&\left\{\begin{matrix}t\\rs\end{matrix}\right\}=\chi_t\left[\frac{1-e^{-\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s)+\frac{1}{2}\nu'\chi_r\chi_s\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(13.13)$$

Как и в предыдущем случае, компоненты, в которые индекс 4 входит нечетное число раз, обращаются в нуль.

Вычислим компоненты свернутого тензора кривизны $R_{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{44}=-e^{\mu-\nu}\left\{\frac{1}{2}\mu''+\frac{1}{r}\mu'+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\},\\
&R_{4s}=0,\\
&R_{rs}=\left\{\frac{1}{2}\mu''-\frac{1}{r}\nu'+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\}\chi_r\chi_s+\\
&+\left\{\frac{1}{r^2}-e^{-\nu}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right]\right\}(\chi_r\chi_s-\delta_{rs}),
\end{aligned}\right\}\qquad(13.14)$$

тогда компоненты тензора $G_{\mu\nu}$ будут равны

$$\left.\begin{aligned}
&G_{44}=e^{\mu}\left\{e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\right\},\\
&G_{4s}=0,\\
&G_{rs}=-\left\{\frac{\mu'}{r}+\frac{1-e^{\nu}}{r^2}\right\}\chi_r\chi_s+\left\{\frac{1}{2}\mu''+\right.\\
&\left.+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right\}e^{-\nu}(\chi_r\chi_s-\delta_{rs})
\end{aligned}\right\}\qquad(13.15)$$

Рассмотрим сначала гравитационное поле в пустоте, где удовлетворяются уравнения (12.4). Нужно решить следующие три уравнения для двух неизвестных:

$$\left.\begin{aligned}
\nu'-\frac{1}{r}(1-e^{\nu})&=0,\\
\mu'+\frac{1}{r}(1-e^{\nu})&=0,\\
\mu''+\frac{1}{2}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{1}{r}(\mu'-\nu')&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.16)$$

Эти три уравнения не независимы, так как они должны удовлетворять свернутым тождествам Бьянки (11.46).

Из первого и второго уравнений видно, что сумма μ' и ν' равна нулю:

$$\mu'+\nu'=0. \qquad (13.17)$$

Решим первое уравнение относительно ν. Для этого введем величину x:

$$x=e^{-\nu},\quad \nu=-\log x. \qquad (13.18)$$

Тогда вместо первого уравнения (13.16) получим уравнение для x:

$$\frac{dx}{dr}+\frac{x-1}{r}=0,$$

решением которого будет

$$x = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad \nu = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right),$$

$$D = -\frac{\alpha}{r - \alpha}, \tag{13.19}$$

где α — постоянная интегрирования. В силу (13.17) функция может быть представлена в виде:

$$\mu = \log\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \beta, \tag{13.20}$$

где β — новая постоянная. Решения (13.19) и (13.20) удовлетворяют и третьему уравнению (13.16). Таким образом, для компонент метрического тензора находим:

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= e^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\right)\chi_r\chi_s = \\ &= -\delta_{rs} - \frac{\alpha}{r - \alpha}\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

При больших r компоненты метрического тензора должны стремиться к значениям $\varepsilon_{\mu\nu}$ уравнения (12.7). Для этого необходимо положить β равной нулю. Оставшаяся постоянная α должна характеризовать массу частицы, образующей поле (13.21).

Согласно (12.13) ньютоновский потенциал, создаваемый точечной массой поля (13.21), равен

$$G = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r}. \tag{13.22}$$

С другой стороны, G связано с массой уравнением

$$G = -\frac{\varkappa m}{r}, \tag{13.23}$$

откуда находим связь постоянной α с массой m:

$$\alpha = 2\varkappa m. \tag{13.24}$$

Гравитационное поле точечной массы поэтому дается выражениями

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 - \frac{2\varkappa m}{r}, \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} - \frac{2\varkappa m}{r - 2\varkappa m}\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \qquad (13.25)$$

Это решение было получено Шварцшильдом [1]).

Решение Шварцшильда замечательно тем, что оно представляет собой единственное статическое сферически симметричное решение уравнений поля в пустоте, переходящее в плоскую метрику на бесконечности. Остальные решения уравнений поля в пустоте, обладающие теми же свойствами, получаются из решения Шварцшильда путем преобразования координат. Более того, Биркгоффом [2]) было показано, что все сферически симметричные решения уравнений поля в пустоте, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности, эквивалентны полю Шварцшильда, т. е. что их зависимость от времени может быть исключена подходящим преобразованием координат.

Пусть ограниченная область пространства заполнена материей, создающей сферически симметричную метрику. Тогда согласно сказанному выше гравитационное поле вне области, занятой материей, должно быть полем Шварцшильда. Создающая поле материя может даже пульсировать (сферически симметрично), не меняя поля вне ее. При этом, конечно, предполагается, что нет потока материи или электромагнитного излучения из области, занятой материей, наружу.

Особенность решения Шварцшильда. Решение (13.23) классических уравнений поля (10.7) имеет особую точку $r = 0$. Поле Шварцшильда имеет аналогичную особенность

---

[1]) Berl. Ber., 1916, p. 189.

[2]) Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, 1923, p. 253.

в той же точке. Кроме того, оно имеет сферическую поверхность особых точек $r = 2\varkappa m$. На этой поверхности компонента g_{44} равна нулю, а некоторые из пространственных компонент обращаются в бесконечность.

Робертсон показал, что если бы пробное тело двигалось в поле Шварцшильда к центру, собственное время, необходимое для пересечения „особенности Шварцшильда", было бы конечно, хотя координатное время при этом обращается в бесконечность. Отсюда он заключил, что, по крайней мере частично, особый характер поверхности $r = 2\varkappa m$ обусловлен выбором системы координат.

В действительности, масса никогда не может так сконцентрироваться, чтобы особая поверхность Шварцшильда оказалась в пустоте. Эйнштейн исследовал поле системы многих точечных масс, каждая из которых движется под действием поля всей системы по окружности $r = \text{const}$. [1]). Если предположить, что оси этих окружностей ориентированы беспорядочно, система в целом будет сферически симметрична. Целью исследования было определить, могут ли частицы сконцентрироваться столь близко от центра, чтобы в полном поле обнаруживалась особенность Шварцшильда. Исследование показало, что еще перед тем, как достигается критическая концентрация частиц, некоторые (наружные) частицы начинают двигаться со скоростью света, т. е. вдоль нулевой мировой линии. Поэтому невозможно так сконцентрировать частицы системы, чтобы в поле возникла особенность. (Особенности, обусловленные каждой отдельной точечной массой, при этом, конечно, не рассматриваются.)

При таком подходе Эйнштейну не пришлось рассматривать термодинамических вопросов или вводить давление, так как частицы его системы не испытывают соударений, а траектории их точно известны. В этом отношении система Эйнштейна имеет свойства, не встречающиеся в природе. Тем не менее, естественно предположить, что

---

[1]) Annals of Mathematics, **40**, 922 (1939).

результаты Эйнштейна могут быть обобщены и на такие системы частиц, в которых движение каждой частицы не ограничивается искусственно, как в разобранном примере.

Поле электрически заряженной точечной массы. Перейдем теперь к рассмотрению электрически заряженных точечных масс. Электростатическое поле характеризуется скалярным потенциалом φ_4, который является функцией r. Ковариантные компоненты электромагнитного поля равны

$$\varphi_{4s} = \varphi_{4,s} = \varphi_4' \chi_s, \quad \varphi_{rs} = 0. \tag{13.26}$$

Компонентами электромагнитного тензора энергии-импульса будут

$$\left.\begin{aligned}
M_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} - \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu}^{\ \rho}\right], \\
M_{44} &= -\frac{1}{8\pi}\varphi_{4s}\varphi_{4r}g^{sr} = \frac{1}{8\pi}(\varphi_4')^2 e^{-\nu}, \\
M_{4s} &= 0, \\
M_{rs} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\, g_{rs}\varphi_{4i}\varphi^{4i} - \varphi_{r4}\varphi_{s}^{\ 4}\right] = \\
&= \frac{1}{8\pi}(\varphi_4')^2 e^{-(\mu+\nu)}\left[-e^{\nu}\chi_r\chi_s + (\delta_{rs} - \chi_r\chi_s)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{13.27}$$

Комбинируя уравнения (12.3), (12.30) и (13.5), получим:

$$\left.\begin{aligned}
& e^{\mu}\left\{e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right\} + \varkappa e^{-\nu}(\varphi_4')^2 = 0, \\
& -\left(\frac{\mu'}{r} + \frac{1-e^{\nu}}{r^2}\right) - \varkappa(\varphi_4')^2 e^{-\mu} = 0, \\
& -\left\{\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{2r}(\mu' - \nu') + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu')\right\}e^{-\nu} + \\
& \qquad + \varkappa(\varphi_4')^2 e^{-(\mu+\nu)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

Кроме того, имеем электромагнитное уравнение

$$\varphi^{4\rho}_{\ ;\rho} = 0.$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\varphi^{4s}{}_{,s} + \varphi^{4m}\left\{ {\rho \atop m\rho} \right\} = 0.$$

Для φ^{4s} получим

$$\varphi^{4s} = g^{44} g^{rs} \varphi_{4s} = -e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' \chi_r,$$

откуда

$$[e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' \chi_s]_{,s} + \frac{1}{2} e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' (\mu' + \nu') = 0,$$

или

$$\varphi_4'' + \frac{2}{r} \varphi_4' - \frac{1}{2} (\mu' + \nu') \varphi_4' = 0. \tag{13.29}$$

Первым интегралом этого последнего уравнения будет

$$r^2 e^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)} \varphi_4' = -\varepsilon, \tag{13.30}$$

где постоянная интегрирования ε представляет собой заряд.

С помощью этого интеграла можно исключить φ_4' из уравнений поля (13.28). Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0, \\ e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0, \\ -e^{-\nu}\left[\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{2r}(\mu' - \nu') + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu')\right] + \\ + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

Далее, комбинация первых двух уравнений приводит к уравнению (13.17). Введением переменной x согласно уравнению (13.18) первое уравнение (13.31) переводится в дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dr} + \frac{x-1}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^3} = 0, \tag{13.32}$$

решением которого будет

$$x = 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}. \tag{13.33}$$

Метрический тензор имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}, \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}}\right)\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.34}$$

Уравнение (13.30) принимает вид

$$\varphi_4' = \frac{-\varepsilon}{r^2 - 2m\varkappa r + \varkappa\varepsilon^2}, \tag{13.30a}$$

с решением

$$\varphi_4 = +\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varkappa\varepsilon^2 - \varkappa^2 m^2}} \operatorname{arcctg}\left[\frac{r - \varkappa m}{\sqrt{\varkappa\varepsilon^2 - \varkappa^2 m^2}}\right]. \tag{13.35}$$

Решение с осевой симметрией. Вейлю и Леви-Чивита удалось найти статические решения, обладающие только осевой симметрией, но не сферической[1]). Если с самого начала предположить, что „статичность" означает как независимость $g_{\mu\nu}$ от ξ^4, так и обращение в нуль компонент g_{4s}, то можно показать, что метрический тензор с осевой симметрией может быть представлен в виде:

$$\left.\begin{aligned} &g_{44} = e^{\mu}, \quad g_{4s} = 0, \; g_{43} = 0, \\ &g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \; g_{3\nu} = 0, \\ &g_{rs} = e^{-\mu}\left[-\delta_{rs} + (1 - e^{-\nu})\,\chi_r\chi_s\right], \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &r, s = 1, 2 \text{ (но не 3)} \\ &\chi_r = \frac{\xi^r}{\rho}, \\ &\rho^2 = \xi^{1^2} + \xi^{2^2}, \end{aligned}\right\} \tag{13.36}$$

---

[1]) Weyl, Annalen d. Physik, **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919). Bach and Weyl. Mathematische Zeitschrift, **13**, 142 (1921). Levi-Civita, Rend. Acc. dei Lincei, Several Notes (1918—1919).

где μ и ν — функции двух переменных,

$$\rho=\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}} \quad \text{и} \quad z=\xi^3.$$

Тензор $G_{\mu\nu}$ имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned}
G_{44}&=e^{2\mu-\nu}\left\{-\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\},\\
G_{33}&=\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho}-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right],\\
G_{3s}&=\left\{-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right\}\chi_s,\\
G_{rs}&=\left\{-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\chi_r\chi_s+\\
&+\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\}e^{-\nu}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s)\\
G_{4s}&=0, \quad G_{43}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{13.37}$$

В чисто гравитационном поле имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_1&\equiv\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=0,\\
\varkappa_2&\equiv\frac{\partial\nu}{\partial\rho}-\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]=0,\\
\varkappa_3&\equiv\frac{\partial\nu}{\partial z}-\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\\
\varkappa_4&\equiv\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{13.38}$$

Из этих четырех уравнений два являются тождествами, именно, свернутыми тождествами Бьянки с индексами

3 и s ($s=1,2$). Можно убедиться, что последнее уравнение (13.38) вытекает из трех предыдущих:

$$\varkappa_4 \equiv \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \varkappa_3}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \varkappa_1. \tag{13.39}$$

Первые три уравнения в свою очередь связаны соотношением

$$\frac{\partial \varkappa_2}{\partial z} - \frac{\partial \varkappa_3}{\partial \rho} \equiv \rho \frac{\partial \mu}{\partial z} \varkappa_1. \tag{13.40}$$

Две функции μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности. Далее, из уравнений (13.36) видно, что g_{rs} имеют особенность (т. е. неопределенны) на оси Ξ^3, если только $(1-e^{-\nu})$ не обращается на ней в нуль, т. е. если ν не равно нулю при $\rho=0$.

Первое уравнение (13.38), ($\varkappa_1=0$), является линейным однородным уравнением только для μ; кроме того, оно является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах для функций, обладающих осевой симметрией. Известно, что решения уравнения Лапласа, не считая решения $\mu=0$, удовлетворяют граничным условиям на бесконечности только в том случае, если они имеют особенность в какой-либо точке, находящейся на конечном расстоянии от начала координат. Особенности вне оси Ξ^3 всегда представляют собой окружности, в то время как на оси Ξ^3 могут быть особенности точечного типа, вида $\sum_i [\rho^2+(z-a_i)^2]^{-1/2}$ или n-е производные по z от таких „полюсов".

Однако не все эти решения совместимы с дифференциальными уравнениями для ν, $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$. Если уравнение $\varkappa_1=0$ удовлетворяется в некоторой односвязной области пространства ρ, z ($\rho \geqslant 0$), то в силу (13.40) уравнения для $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ имеют решения. Но при наличии особенностей пространство ρ, z уже не будет односвязным.

Рассмотрим сначала особенности вне оси Ξ^3. Если выбрать решение μ уравнения $\varkappa_1=0$ с произвольной окружностью особых точек, интеграл по замкнутому контуру,

окружающему такую особенность в плоскости ρ, z,

$$\left.\begin{aligned}&\oint\left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial\nu}{\partial z}dz\right)=\\&=\oint\left\{\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]d\rho+\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}dz\right\},\end{aligned}\right\}\quad(13.41)$$

вообще говоря, не будет обращаться в нуль. Однако если интеграл (13.41) не исчезает, функция ν не будет однозначно определена вне особенности; иначе говоря, обращение в нуль интеграла (13.41) является необходимым условием существования решения.

Перейдем к рассмотрению особенностей на оси Ξ^3. Вне особенности $\frac{\partial\nu}{\partial z}$ равно нулю на оси Ξ^3, следовательно, если предположить, что ν обращается в нуль в некоторой точке на оси Ξ^3, оно будет равно нулю на всей оси Ξ^3, до особой точки. Сама особая точка должна быть такова, что должен обращаться в нуль интеграл от дифференциала

$$d\nu\equiv\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]d\rho+\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}dz,\qquad(13.42)$$

взятый по малой полуокружности около особенности от одной точки пересечения этой полуокружности с осью Ξ^3 до другой.

Рассмотрим типичную особенность на оси Ξ^3

$$\overset{(1)}{\mu}=(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.\qquad(13.43)$$

Производные от $\overset{(1)}{\mu}$ равны

$$\frac{\partial\overset{(1)}{\mu}}{\partial\rho}=-\frac{\rho}{r^3},\quad\frac{\partial\overset{(1)}{\mu}}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},\quad r=\sqrt{\rho^2+z^2}.$$

Дифференциал (13.42) принимает вид:

$$d\nu=\left(\frac{\rho}{2}\,\frac{\rho^2-z^2}{r^6}\,d\rho+\frac{\rho^2 z}{r^6}dz\right).\qquad(13.44)$$

Проведем интегрирование по малой полуокружности. Для этого введем угол φ.

$$\left.\begin{aligned} \rho &= r\cos\varphi, \quad d\rho = -z\cdot d\varphi, \\ z &= r\sin\varphi, \quad dz = \rho\cdot d\varphi, \end{aligned}\right\} r = \text{const}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (13.44), получим:

$$d\nu = \frac{1}{2r^2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi, \quad r = \text{const}. \tag{13.45}$$

Интегрирование производим от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\left[\nu\right]_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{2r^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4r^2}\left[\sin^2\varphi\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 0. \tag{13.46}$$

Решение $\overset{(1)}{\mu}$ [уравнение (13.43)] совместимо с условиями регулярности для ν.

Рассмотрим теперь случай наличия двух особенностей. В одной особой точке решение с особенностью в другой точке можно разложить в степенной ряд по ρ^2 и z и предположить, что вблизи от начала координат μ имеет вид

$$\overset{(2)}{\mu} = \frac{a}{r} + \sum_{m,\,n} a_{m,\,n}\,\rho^{2m}z^n. \tag{13.47}$$

Перед тем как снова вычислять интеграл, заметим, что только некоторые коэфициенты разложения могут входить в интеграл по полуокружности. Значение интеграла, конечно, не зависит от размеров полуокружности, т. е. от r, до тех пор, пока эта окружность не охватывает никакой другой особой точки, кроме первоначальной ($r = 0$). Поэтому не должны рассматриваться все коэфициенты $a_{m,n}$, делающие значение интеграла зависящим от r. Кроме того, регулярная часть $\overset{(2)}{\mu}$ сама по себе не может ничего прибавить к неисчезающему интегралу, поэтому нужно рассмат-

ривать только перекрестные произведения сингулярной и регулярной частей $\overset{(2)}{\mu}$. Производные сингулярной части $\overset{(2)}{\mu}$ (при заданном φ) убывают как r^{-2}. Они умножаются на ρ, на дифференциалы координат (и ρ и эти дифференциалы возрастают, как r^{+1}) и на производные от регулярной части $\overset{(2)}{\mu}$. Поэтому для нас представляют интерес только те члены разложения, производные которых зависят только от φ, но не от r. Единственным таким членом будет $\rho^0 z^{+1}$. Заменим поэтому выражение (13.47) на

$$\overset{(2)}{\mu} = \frac{a}{r} + bz + \ldots \tag{13.47a}$$

Вычислим выражение

$$d\nu = -\rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}(bz)\,d\rho + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}(bz)\,dz + \ldots \tag{13.48}$$

Только выписанные члены могут привести к неисчезающим значениям интеграла. Получим:

$$d\nu = \frac{ab}{r^3}\rho\,(z\,d\rho - \rho\,dz) = -ab\cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= -ab\,d(\sin\varphi). \tag{13.49}$$

Интеграл этого выражения в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ не равен нулю.

Мы нашли, что в окрестности одной из особых точек производная по z от регулярной части μ должна обращаться в нуль. Это исключает возможность одновременного существования нескольких особых точек на оси Ξ^3. Это выглядит так, как будто сами уравнения поля исключают движения точечных масс, не совместимые с уравнениями движения. В главе XV мы увидим, что это действительно так.